

1) Phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) ①

- Phương trình ① có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$
- Phương trình ① có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$
- Phương trình ① có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- Phương trình ① có 2 nghiệm cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- Phương trình ① có 2 nghiệm cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
- Phương trình ① có 2 nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$

Ví dụ: Cho phương trình: $2x^2 - 5x - m + 3 = 0$ ①

a. Tìm điều kiện để phương trình ① có 2 nghiệm trái dấu:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.2(m+3) = 25 + 8m - 24 = 1 + 8m$$

- Giả sử phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2

- Theo định lí Viet, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2} = 2,5 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m+3}{2} \end{cases}$$

- Phương trình ① có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+8m > 0 \\ \frac{-m+3}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m > -1 \\ -m+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{8} \\ m > 3 \end{cases}$

- Vậy $m > 3$ thì phương trình ① có 2 nghiệm trái dấu.

b. Tìm điều kiện để phương trình ① có 2 nghiệm cùng âm:

- Phương trình ① có 2 nghiệm cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+8m \geq 0 \\ m+3 > 0 \\ 2,5 < 0 \text{ (sai)} \end{cases}$

- Vậy không có giá trị m để phương trình có 2 nghiệm cùng âm.

2) Hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

- Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

- Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

3) Hàng đẳng thức

① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

① $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

④ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

⑤ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

⑥ $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$

⑦ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

⑧ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

⑨ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

⑩ $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

4) Tỉ số lượng giác: $\sin = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}$ $\cos = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$ $\text{tag} = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}$ $\text{cotag} = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}$

| Cung | 0° | 15° | 30° | 45° | 60° | 75° | 90° | 105° | 120° | 135° | 150° |
|-------|------------------|-------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------------------|------------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Sin | 0 | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | 1 | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Cos | 1 | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | 0 | $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Tag | 0 | $2-\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ | $\infty+\square$ | $-2-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| Cotag | $\square\infty+$ | $\frac{1-2\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $2-\sqrt{3}$ | 0 | $-2+\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ |

5) Giải phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

a. Dùng công thức nghiệm: [Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với a và c trái dấu thì luôn có 2 nghiệm phân biệt]

$\Delta = b^2 - 4ac$

* $\Delta > 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

* $\Delta = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

* $\Delta < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

b. Dùng công thức nghiệm thu gọn

$b = 2b' \Rightarrow b' = \frac{b}{2}$; $\Delta' = b'^2 - ac$

* $\Delta' > 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

* $\Delta' = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

* $\Delta' < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

c. Tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc 2

* Biết được:
$$\left. \begin{aligned} S = x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 \text{ và } x_2$$

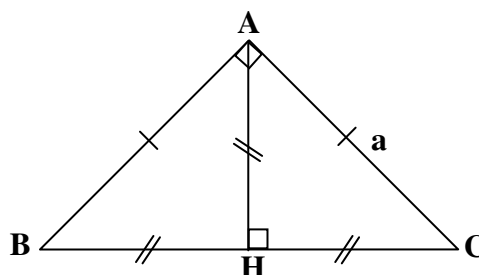
* Biết được: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$

* Biết được: $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$

**** Các tam giác đặc biệt ****

6) Tam giác vuông cân

- ΔABC vuông cân tại A; $AB = AC = a$
- ΔABC đồng dạng với ΔABH đồng dạng với ΔACH



- $BAC = AHC = AHB = 90^\circ$
- $BAH = ABH = ACH = CAH = 45^\circ$
- $BC = AB\sqrt{2} = AC\sqrt{2}$; $a = HB\sqrt{2} = HC\sqrt{2} = AH\sqrt{2}$
- AH là đường cao, đường trung trực, đường trung tuyến, tia phân giác của ΔABC
- $a = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = BH\sqrt{2} = CH\sqrt{2} = AH\sqrt{2} = \frac{(BH + CH)\sqrt{2}}{2} = \frac{(BH + AH)\sqrt{2}}{2} = \frac{(CH + AH)\sqrt{2}}{2}$
- $S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{AH^2 + AH^2}{2}$

***Chứng minh một tam giác vuông cân:**

| | | |
|---|---|--|
| ΔABC vuông tại A $BC = AB\sqrt{2}$ $BC = AC\sqrt{2}$ $AB = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$ $AC = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$ $AB = AC$ $ABC = 45^\circ$ $ACB = 45^\circ$ | } | $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A |
|---|---|--|

7) Tam giác đều

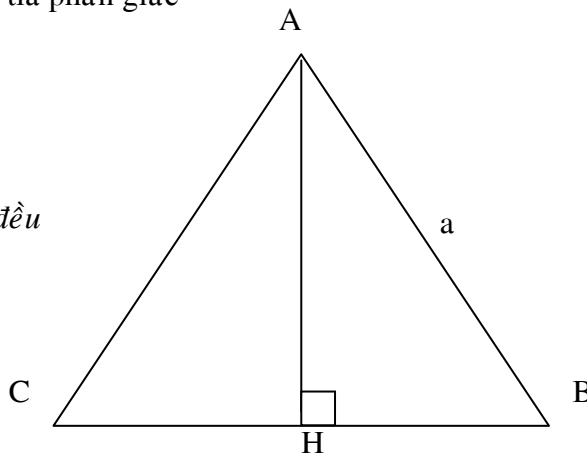
- ΔABC đều; $AB = AC = BC = a$
- AH là đường cao, đường trung tuyến, đường trung trực và tia phân giác
- $CH = HB = \frac{a}{2}$; $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

***Chứng minh một tam giác đều:**

| | | |
|--|---|------------------------------|
| ΔABC cân $ABC = 60^\circ$ $ACB = 60^\circ$ $CAB = 60^\circ$ | } | $\Rightarrow \Delta ABC$ đều |
|--|---|------------------------------|

8) Nửa tam giác đều

- ΔACH và ΔABH là nửa tam giác đều
- $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = BH\sqrt{3} = CH\sqrt{3}$
- $CH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{AH\sqrt{3}}{3}$



$$- AB = AC = 2CH = 2BH = \frac{2AH\sqrt{3}}{3}$$

ΔAHC vuông

***Chứng minh nửa tam giác đều:**

$AHC(ACH, CAH) = 60^\circ$

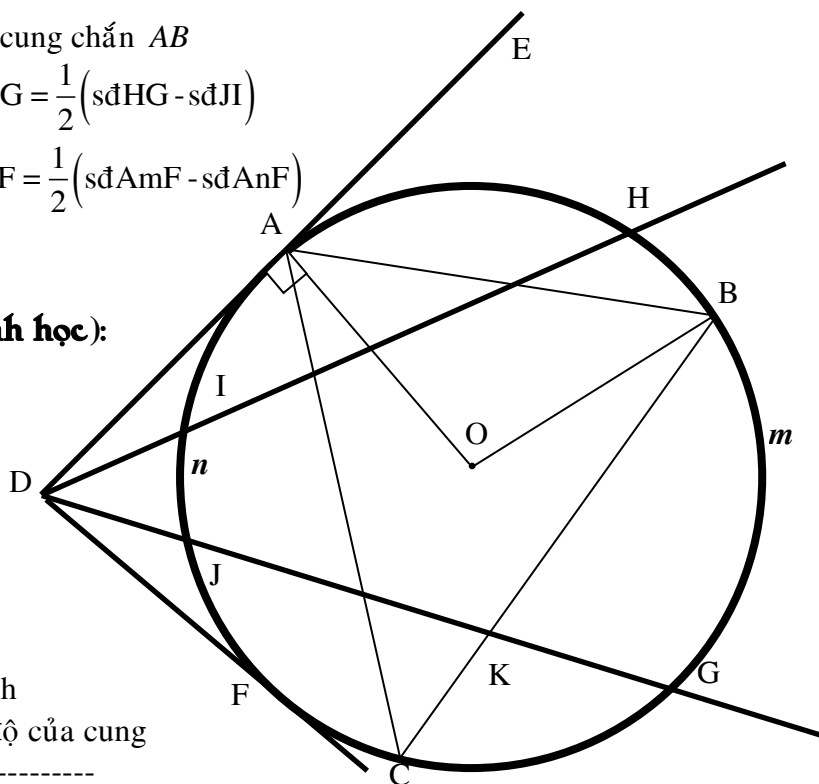
$AH = 2HC$

$HC = \frac{AC\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \Delta AHC$ là nửa tam giác đều

9) Góc và đường tròn

- AOB : góc ở tâm chắn AB
- ACB : góc nội tiếp chắn AB
- EAB : góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn AB
- $ACB = EAB = \frac{1}{2} AOB$
- $sđADG = \frac{1}{2}(sđAG - sđJA)$
- $JKC = BKG = \frac{1}{2}(sđJC + sđBG)$
- $sđHDG = \frac{1}{2}(sđHG - sđJI)$
- $sđEDF = \frac{1}{2}(sđAmF - sđAnF)$



10) Một vài công thức cần nhớ (Hình học):

- Độ dài đường tròn: $C = 2\pi R$
 - Độ dài cung tròn: $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$
 - Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2$
 - Diện tích hình quạt tròn: $S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$
- *Ghi chú:**
- + π : số pi
 - + C : độ dài đường tròn
 - + l : độ dài cung
 - + R : bán kính
 - + n° : số đo độ của cung

- Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi R \cdot h$
 - Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{tp} = 2\pi R \cdot h + 2\pi R^2$
 - Thể tích hình trụ: $V = Sh + \pi R^2 h$
 - Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$
 - Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$
 - Thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$
- *Ghi chú:**
- + h : chiều cao
 - + l : đường sinh

11) Một vài công thức cần nhớ (Đại số):

- Với $a \geq 0; b \geq 0$ thì $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$)
- Với $a \geq b \geq 0$ thì $\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$)
- Công thức căn phức tạp:** $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$ trong đó $A > 0; B > 0; A^2 > B$
- Bất đẳng thức Cô-si:** với $a \geq 0, b \geq 0$ thì: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$)

Vài dạng khác của bất đẳng thức Cô-si:

- Dạng có chứa dấu căn:
- ★ $a + b \geq \sqrt{ab}$ với $a \geq 0; b \geq 0$
 - ★ $\frac{1}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{2}{\sqrt{a+b}}$ với $a > 0; b > 0$

- Dạng không có dấu căn

★ $\frac{(a+b)^2}{2} \geq ab$

★ $(a+b)^2 \geq 4ab$

★ $a^2 + b^2 \geq 2ab$

5. $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

6. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

7. $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$

8. $X^2 \geq A^2 \Leftrightarrow X \geq A \text{ hay } X \leq -A$; $X^2 \leq A^2 \Leftrightarrow -A \leq X \leq A$

9. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$

- Đặt điều kiện: $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, h(x) \geq 0$

- Chuyển vế (2 vế phải không âm)

- Bình phương 2 vế

10. $Min = X^2 \pm m \geq \pm m$; $Max = \pm m - X^2 \leq \pm m$

11. Điều kiện để biểu thức có nghĩa:

- Biểu thức có dạng \sqrt{A} có nghĩa khi

- $A \geq 0$ - Biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$ có nghĩa khi $B \neq 0$

- Biểu thức có dạng $\frac{A}{\sqrt{B}}$ có nghĩa khi $B > 0$

12) Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau. Hệ số góc của đường thẳng

1. Cho 2 đường thẳng: $(d_1) : y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $(d_2) : y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$)

★ $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a = a'; b \neq b'$

★ $(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow a \neq a'$

★ $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a = a'; b = b'$

★ $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

2. Khi $a > 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc nhọn.

Khi $a < 0$ thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tù.

3. Nếu (d_1) cắt (d_2) thì hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $ax + b = a'x + b'$

4. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox. Nếu $a > 0$ thì $tg\alpha = a$

13) Các dạng phương trình đặc biệt:

1. Phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) [\approx]

Nếu biết 1 nghiệm $x = x_0$ thì [\approx] được đưa về phương trình tích: $(x - x_0)(ax^2 + mx + n) = 0$

2. Phương trình hệ đối xứng bậc 4: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$) [\diamond]

a) Phương pháp giải:

- Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của [\diamond].

- Chia 2 vế của [\diamond] cho x^2 và nhóm các số hạng cách đều 2 số hạng đầu và cuối thành từng nhóm được phương trình [$\diamond\diamond$]

- Đặt ẩn phụ $t = x + \frac{1}{x}$ [$\diamond\diamond\diamond$] $\Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ rồi thế vào phương trình [$\diamond\diamond$].

- Giải phương trình trung gian này để tìm t, thế giá trị của t vào [$\diamond\diamond\diamond$] để tìm x

b) Về nghiệm số của phương trình:

- Nếu x_0 là nghiệm của phương trình [\diamond] thì $\frac{1}{x_0}$ cũng là nghiệm của nó

c) Phương trình hệ đối xứng bậc 5: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$) [\clubsuit]

có nghiệm $x = -1$ (vì tổng hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ). Vì thế [\clubsuit] có thể biến đổi thành:

$$(x+1)[ax^4 + (b-a)x^3 + (c+a-b)x^2 + (b-a)x + a] = 0$$

3. Phương trình hồi quy: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + mx + n = 0$ ($a \neq 0$) trong đó $\frac{n}{a} = \left(\frac{m}{b}\right)^2$ [★]

a) Phương pháp giải:

- Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của [★].
- Chia 2 vế của [★] cho x^2 và nhóm các số hạng cách đều 2 số hạng đầu và cuối thành từng nhóm được phương trình [★★]
- Đặt ẩn phụ $t = x + \frac{m}{bx}$ [★★★] $\Rightarrow t^2 - \frac{2m}{b} = x^2 + \frac{m^2}{b^2x^2}$ rồi thế vào phương trình [★★].
- Giải phương trình trung gian này để tìm t , thế giá trị của t vào [★★★] để tìm x

4. Phương trình trong đó $a + d = b + c$: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ [★]

Phương pháp giải:

- Viết lại [★] dưới dạng: $[(x + a)(x + d)][(x + b)(x + c)] - m = 0$ [★★]
- Khai triển các tích và đặt ẩn phụ t là 1 trong 2 biểu thức vừa khai triển.
- Thế ẩn phụ vào phương trình [★★], giải phương trình, tìm giá trị của t .
- Thế giá trị của t vào biểu thức chứa ẩn phụ để tìm x .

5. Phương trình trong đó: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

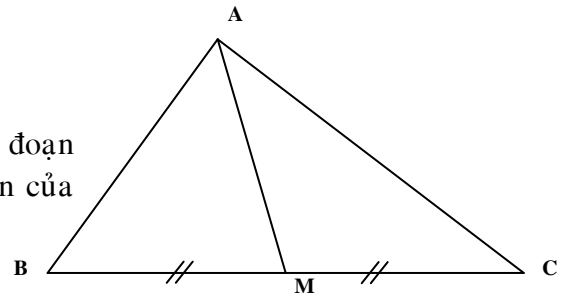
Phương pháp giải:

- Đối với phương trình dạng này, ta đặt ẩn phụ là trung bình cộng của $(x + a)$ và $(x + b)$:
- Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$

14) Một số kiến thức cơ bản về hình học cấp 2:

1. Trung tuyến của tam giác: Trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng, một đầu nối đỉnh của tam giác, đầu kia nối trung tuyến của cạnh đối diện với đỉnh trên.

Ta có tam giác ABC có AM là trung tuyến $\Rightarrow MC = MB$



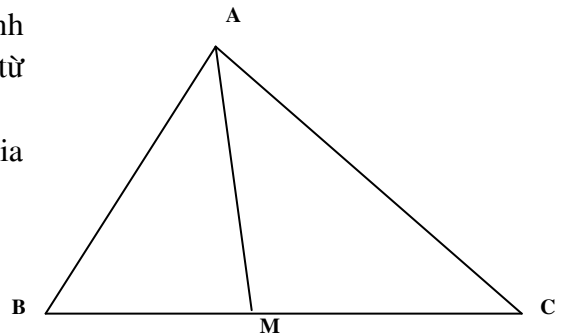
- Áp dụng vào tam giác vuông:

- + Định lý thuận: Trong 1 tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền
- + Định lý đảo: Trong 1 tam giác, đường trung tuyến bằng nửa cạnh đối diện thì tam giác đó vuông.

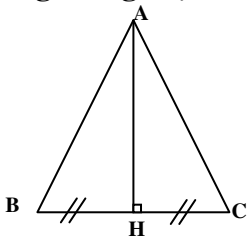
2. Tia phân giác:

- Tia phân giác của góc là tia nằm trong góc ấy và chia góc đó ra làm hai góc bằng nhau.
- Phân giác của tam giác là một đoạn thẳng có một đầu là đỉnh của tam giác, đầu kia là giao điểm của tia phân giác xuất phát từ đỉnh đến cạnh đối diện.
- Trong một tam giác, đường phân giác trong và ngoài chia cạnh đối diện thành những đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề.

Ta có tam giác ABC có AM là đường phân giác $\Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$



3. Đường trung trực:



- Định nghĩa: Đường thẳng trung trực của 1 đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn đó tại trung điểm.
- Định lý 1: Nếu điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB là đường trung trực của đoạn AB.
- Định lý 2: Tập hợp những điểm cách đều 2 đầu của đoạn thẳng AB là đường thẳng trung trực của đoạn AB

Ta có tam giác ABC có AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến, vừa là phân giác, vừa là trung trực (tam giác ABC cân)

4. Đường trung bình của tam giác:

- Định lý 1: Trong một tam giác, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì nó đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

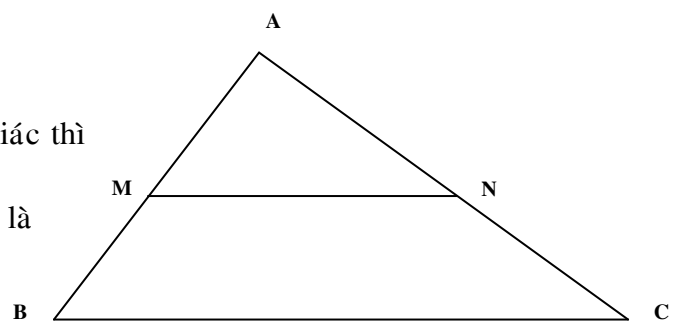
- Định lý 2: Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh thứ ba.

- Định lý 3: Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh tam giác gọi là đường trung bình của tam giác.

5. Tính chất ba đường trung tuyến:

- Trong một tam giác, ba đường trung tuyến cắt nhau tại một điểm. Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.

- Khoảng cách từ đỉnh đến trọng tâm bằng $\frac{2}{3}$ trung tuyến đó.



6. Tính chất đường phân giác:

a) Tính chất 3 đường phân giác:

Định lý về phân giác của góc:

+ Định lý thuận: Bất cứ điểm nào nằm trên đường phân giác của một góc thì cũng cách đều 2 cạnh góc đó.

+ Định lý đảo: Điểm nào cách đều 2 cạnh của một góc thì nằm trên phân giác của góc đó.