CHƯƠNG 3

HÀM NHIỀU BIẾN

Khái niệm hàm hai biến

- Định nghĩa: Cho không gian:

$$R^2 = \{(x,y) : x,y \in R\} \ va \quad D \subset R^2$$

- Ánh xạ:

$$f: \ D \ \to R$$
$$(x,y) \mapsto z = f(x,y)$$

- Được gọi là hàm hai biến xác định trên tập hợp D
- Mỗi cặp (x,y)∈ D tương ứng với một số thực z
- x, y là các biến độc lập; z là biến phụ thuộc

Khái niệm hàm ba biến

- Định nghĩa: Cho không gian:

$$R^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in R\} \ va \quad D \subset R^3$$

- Ánh xạ:

$$f: \ D \ \to R$$
$$(x,y,z) \mapsto u = f(x,y,z)$$

- Được gọi là hàm ba biến xác định trên tập hợp D
- Mỗi cặp (x,y,z)∈ D tương ứng với một số thực u
- x, y, z là các biến độc lập; u là biến phụ thuộc

Tập xác định hàm hai biến

- Tập xác định của hàm số là tập hợp tất cả các cặp (x,y) sao cho giá trị biểu thức f(x,y) là số thực.
- Ví dụ: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$a)\ f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$
$$b)\ f(x,y) = \ln(2x - y + 1)$$

Tập xác định hàm ba biến

- Tập xác định của hàm số là tập hợp tất cả các cặp (x,y,z) sao cho giá trị biểu thức f(x,y,z) là số thực.

Đạo hàm riêng

- Cho hàm hai biến z=f(x,y) xác định trên tập D.
- Xem y như hằng số ta được hàm một biến theo x.
- Lấy đạo hàm của hàm số này ta được đạo hàm riêng theo biến x.
- Ký hiệu:

$$z'_x \ hay \ \frac{\partial z}{\partial x}$$

- Tương tự ta được đạo hàm riêng theo biến y

Đạo hàm riêng

- Cho hàm hai biến z=f(x,y) xác định trên tập D.
- Các đạo hàm riêng của z theo x,y:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

- Lấy đạo hàm riêng theo từng biến là đạo hàm của hàm một biến khi xem các biến còn lại như hằng số.

Ví dụ

- Cho hàm số

$$z = x^3 + 3xy^2 - y^4$$

- Đạo hàm riêng theo x (xem y là hằng số)

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2$$

- Đạo hàm riêng theo y (xem x là hằng số)

$$z'_y = 6xy - 4y^3$$

Vi phân hàm nhiều biến

- Cho hàm hai biến z=f(x,y) có các đạo hàm riêng z'_x; z'_y
- Khi đó biểu thức:

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy$$

- Được gọi là vi phân toàn phần của hàm hai biến đã cho.
- Ý nghĩa:

Ví dụ

- Hàm số

$$z = x^3 - y^2 + xy$$

- Có vi phân toàn phần là

$$dz = (3x^2 + y)dx + (x - 2y)dy$$

Đạo hàm riêng cấp 2

- Cho hàm hai biến z=f(x,y) có các đạo hàm riêng z'_x; z'_y
- Đây là các đạo hàm riêng cấp 1
- Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1 gọi là đạo hàm riêng cấp 2
- Các đạo hàm riêng cấp 2

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = z''_{x^2} \qquad (z'_x)'_y = z''_{xy}$$
$$(z'_y)'_x = z''_{yx} \qquad (z'_y)'_y = z''_{yy} = z''_{y^2}$$

Đạo hàm riêng cấp 2

- Các đạo hàm riêng cấp 2 còn được ký hiệu lần lượt là:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

- Ví dụ: Các đạo hàm riêng của: $z = x^3 - y^2 + xy$

$$z'_x = 3x^2 + y \qquad z'_y = -2y + x$$
$$z''_{xx} = 6x \qquad z''_{xy} = 1$$
$$z''_{yx} = 1 \qquad z''_{yy} = -2$$

Đạo hàm riêng cấp 2

- Bài tập: Tính các đhr cấp 2 của hàm số:

$$a)\ z = x^y \qquad b)\ z = e^{xy} \qquad c)\ z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Vi phân cấp 2

- Vi phân cấp 2 của hàm hai biến z=f(x,y) là biểu thức có dạng:

$$d^2z = z_{x^2}''dx^2 + 2z_{xy}''dxdy + z_{y^2}''dy^2$$

- Chú ý:

$$d^2z = d(dz) = d\left(z'_x dx + z'_y dy\right)$$
$$d^2z = z_{xx}''dx^2 + z_{xy}''dxdy + z_{yx}''dydx + z_{yy}''dy^2$$
$$d^2z = z_{x^2}''dx^2 + 2z_{xy}''dxdy + z_{y^2}''dy^2$$

Ví dụ

- VD1. Vi phân cấp 2 của hàm số:

$$z = x^3 - y^2 + xy$$

- là

$$d^2z = 6xdx^2 + 2dxdy - 2dy^2$$

- VD2. Tính vi phân cấp 2 của hàm số:

$$a)\, z = \ln\left(x^2 + y^2\right) \qquad b)\, z = xy^2 + x^3y^3$$
$$c)\, z = \sin\left(x^2 - y^2\right)$$

Cực trị hàm hai biến_Cực đại

- **Khái niệm:** cho hàm hai biến z=f(x,y) xác định trên D
- Xét điểm $M_0(x_0; y_0) \in D$
- Nếu tại các điểm M(x,y) nằm quanh M_0 và M≠ M_0 ta có:

$$f(M) < f(M_0)\ hay\ f(x,y) < f(x_0,y_0)$$

- Thì M_0 gọi là điểm cực đại của hàm số.

Cực trị hàm hai biến_Cực tiểu

- **Khái niệm:** cho hàm hai biến z=f(x,y) xác định trên D
- Xét điểm $M_0(x_0; y_0) \in D$
- Nếu tại các điểm M(x,y) nằm quanh M_0 và M≠ M_0 ta có:

$$f(M) > f(M_0)\ hay\ f(x,y) > f(x_0,y_0)$$

- Thì M_0 gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Khái niệm cực trị

- Các điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là các điểm cực trị.
- **Ví dụ:** Xét hàm số $f(x,y)=x^2+y^2-2x+3$ và điểm $M_0(1;0) \in D = R^2$
- Ta có:

$$f(M_0) = f(1;0) = 2$$
$$f(M) = f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + y^2 + 2 \ge 2$$

- Vậy $f(M_0) < f(M)\ (M \ne M_0)$
- M_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Cực trị của hàm nhiều biến

- Một cách tương tự ta định nghĩa cực đại, cực tiểu của hàm nhiều biến.
- Cho hàm nhiều biến $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong D.
- Điểm $M(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)\in D$ là điểm:
- Cực đại khi?
- Cực tiểu khi?

Điều kiện cần để có cực trị

- Nếu hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong D và đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm

$$M(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)\in D$$

thì $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)=0,\ i=1,2,\ldots,n$$

- Điểm thỏa mãn điều kiện trên được gọi là **điểm dừng** của hàm số
- Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm dừng.
- Đây chỉ là **điều kiện cần**, chưa phải là **điều kiện đủ**.

Ma trận Hess

- Giả sử hàm số *n* biến số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ có đạo hàm riêng cấp 2. Khi đó, ma trận vuông cấp *n*

$$H=\begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận Hess của hàm số. Nếu hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục thì ma trận Hess là ma trận đối xứng.

Ví dụ

- Ma trận Hess của hàm 3 biến

$$f(x,y,z)=x^3y^4z^5$$

- là ma trận

$$H=\begin{bmatrix} 6x^2y^4z^5 & 12x^2y^3z^5 & 15x^2y^4z^4 \\ 12x^2y^3z^5 & 12x^3y^2z^5 & 20x^3y^3z^4 \\ 15x^2y^4z^4 & 20x^3y^3z^4 & 20x^3y^4z^3 \end{bmatrix}$$

Điều kiện đủ của cực trị

- Giả sử

$$M(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)\in D$$

- là điểm dừng của hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp hai liên tục.
- Đặt:

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)\ (i,j=1,2,\ldots,n)$$

Điều kiện đủ để có cực trị

- **Ma trận Hess:**

$$H=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Xét các định thức con chính:**

$$D_1=a_{11}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{2} \end{vmatrix},\ldots,D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ldots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tiêu chuẩn xét cực trị

- i) Nếu $D_1>0, D_2>0, \ldots, D_n>0$ thì M là điểm cực tiểu của hàm số
- ii) Nếu $D_1<0, D_2>0, \ldots, (-1)^n D_n>0$ thì M là điểm cực đại của hàm số
- iii) Nếu $D_i \geq 0$ (hay $(-1)^i D_i>0$) và tồn tại k sao cho $D_k=0$ thì chưa thể kết luận về cực trị địa phương của hàm số tại . Hàm số có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại điểm M. Muốn có được kết luận ta phải sử dụng phương pháp khác.
- iv) Trong các trường hợp khác thì M không phải là điểm cực trị.

Áp dụng cho hàm 2 biến

- Giả sử hàm số f(x,y) có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục $M_0(x_0, y_0)$ và điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm số.
- Ta đặt:

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0) \qquad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0;y_0)$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0) \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC=B^2$$

Áp dụng cho hàm 2 biến

- i) Nếu A>0,   >0 thì M_0 là điểm cực tiểu
- ii) Nếu A<0,   >0 thì M_0 là điểm cực đại
- iii) Nếu   <0 thì M_0 không là điểm cực trị
- iv) Nếu   =0 thì chưa có kết luận.

Các bước tìm cực trị hàm 2 biến

- 1. Tìm tập xác định
- 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2
- 3. Giải hệ pt tìm điểm dừng

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$$

- 4. Tính các đhr cấp 2 tại điểm dừng
- 5. Xét dấu định thức cấp 2
- 6. Kết luận về điểm cực trị và tính cực trị (nếu có)

Ví dụ

- Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$$

- Đ/S: cực tiểu tại M(1;1)

Ví dụ

- Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y,z)=x^3+xy+y^2-2xz+2z^2+3y-1.$$

- Đ/S: cực tiểu tại M(1;-2;1/2)

Bài tập

- Tìm cực trị của hàm số:

$a) z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $\quad b) z = 5xy - x^5 - y^5$

$c) z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ $\quad d) z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

$e) z = x^3 + y^3 + 6xy$

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

- **a) Cực trị có điều kiện ràng buộc với hai biến chọn và một phương trình ràng buộc**.
- **b) Cực trị có điều kiện ràng buộc với n biến chọn và một phương trình ràng buộc**

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Ví dụ

- Tìm cực trị của hàm số:

$$f(x,y) = xy + 2x$$

- Với điều kiện:

$$8x + 4y = 120$$

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Hai biến chọn – ĐK cần

- Cho hàm số z=f(x,y) với ràng buộc φ(x,y)=0
- Giả sử $M(x_0;y_0)$ là điểm cực trị của hàm số z với ràng buộc trên thì tồn tại số λ sao cho:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \\ \varphi(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

- Số λ được gọi là nhân tử Lagrange.
- Hàm số L(x,y, λ)=f(x,y)+ λφ(x,y) được gọi là hàm số Lagrange.

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Hai biến chọn – ĐK cần

- Ta viết lại phương trình đã cho dạng:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

- Trong đó: L(x,y, λ)=f(x,y)+ λφ(x,y)
- Giải phương trình ta có λ, x_0,y_0

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Hai biến chọn – ĐK đủ

- Ta xét giá trị của định thức

$$D = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

- Hoặc

$$D = \begin{vmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

- Tại các điểm dừng tìm được

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Hai biến chọn – ĐK đủ

- Nếu D>0 thì $M(x_0;y_0)$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm số.
- Nếu D<0 thì $M(x_0;y_0)$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số.
- Nếu D=0 thì chưa có kết luận gì về điểm $M(x_0;y_0)$ đang xét.

Ví dụ

- Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y)=6-4x-3y$$

- với điều kiện:

$$x^2+y^2=1.$$

- Đ/S: cực tiểu tại M(4/3; 5/3)
- Cực đại tại N(-4/3;-5/3)

n biến chọn (tham khảo)

- Cho hàm số $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ với ràng buộc $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$. Giả sử:

$$M(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)$$

- là điểm cực trị của hàm số z với ràng buộc trên thì tồn tại số λ sao cho:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)-\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)=0 \\ \varphi(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)=0 \end{cases}$$

- Số λ được gọi là nhân tử Lagrange.
- Hàm số $L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)+\lambda\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ được gọi là hàm số Lagrange.

n biến chọn (tham khảo)

- Ta viết lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)=0\ ;\ i=1,2,\dots,n \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)=0 \end{cases}$$

n biến chọn (tham khảo)

- Ta lập ma trận:

$$H=\begin{bmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ \varphi_2 & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n & L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

- Trong đó:

$$\varphi_k=\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)\ ;\ k=1,2,\dots,n$$

$$L_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n,\lambda)\ ;\ i,j=1,2,\dots,n$$

n biến chọn (tham khảo)

- Xét các định thức:

$$D_k=\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_k \\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1k} \\ \varphi_2 & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k & L_{k1} & L_{k2} & \dots & L_{kk} \end{vmatrix}\ (k=2,3,\dots,n)$$

- Nếu $D_2>0$, $D_3<0$, …, $(-1)^nD_n>0$ thì M là điểm cực đại có điều kiện của hàm số.
- Nếu $D_2<0$, $D_3<0$, …, $D_n<0$ thì M là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số.

Ví dụ

1. Tìm cực trị của hàm số: $f(x,y)=5-x-y$

   Với điều kiện: $x^2+y^2=1$

2. Tìm cực trị của hàm số: $f(x,y)=8x+15y+2$

   Với điều kiện: $2x^2+3y^2=107$

GTLN, GTNN (tham khảo)

- **Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập đóng, bị chặn**
- Cho *D* là tập đóng, bị chặn trong miền có biên cho bởi phương trình $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$
- Giả sử $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ là hàm số liên tục trên *D.*
- Sau đây là quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của trên *D.*

GTLN, GTNN (tham khảo)

- B1. Tìm các điểm nghi ngờ có cực trị của với điều kiện $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$.
- B2. Tìm các điểm dừng của $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ thuộc *D.*
- B3. Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của f trên *D* là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong các giá trị của hàm tại các điểm tìm được ở trên.

Ví dụ

- Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm

$$f(x,y)=x^2+2y^2-x$$

- trong miền

$$D: x^2+y^2\le 1$$

- Đ/S:

$$\min_D f=f\left(\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4};\ \max_D f=f\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

Ví dụ

- Miền D: $x^2+y^2\le 1$
- Biên của miền D là $x^2+y^2=1$
- **Bước 1.** Tìm các điểm nghi ngờ có cực trị với điều kiện:

$$x^2+y^2-1=0$$

- **Bước 2.** Tìm các điểm dừng **thuộc D** của hàm số

$$f(x,y)=x^2+2y^2-x$$

- **Bước 3.** So sánh giá trị hàm số tại các điểm tìm được và kết luận.

Ví dụ

- **Bước 1.**
- Hàm Lagrange:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}L'_x=0\\L'_y=0\\L'_\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1+2\lambda x=0\\4y+2\lambda y=0\\x^2+y^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2+2\lambda)x=1\\y(2+\lambda)=0\\x^2+y^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2+2\lambda)x=1\\\left[\begin{array}{l}y=0\\\lambda=-2\end{array}\right.\\x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

Ví dụ

- Giải tiếp hpt ta có 4 nghiệm

$$\begin{cases}\lambda=-1/2\\ y=0\\ x=1\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda=-3/2\\ y=0\\ x=-1\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda=-2\\ x=-1/2\\ y=\sqrt{3}/2\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda=-2\\ x=-1/2\\ y=-\sqrt{3}/2\end{cases}$$

- Như vậy có 4 điểm nghi ngờ có cực trị với điều kiện:

$$x^2+y^2-1=0$$

- Đặt 4 điểm như sau:

$$M_1(1;0);\ M_2(-1;0);\ M_3\left(-1/2;\sqrt{3}/2\right);\ M_4\left(-1/2;\sqrt{3}/2\right)$$

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Ví dụ

- **Bước 2.**
- Hệ phương trình tìm điểm dừng:

$$\begin{cases}f'_x=0\\ f'_y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=0\\ 4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1/2\\ y=0\end{cases}\Rightarrow M_5(1/2;0)$$

- Ta nhận điểm này vì thuộc miền D do:

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}\le 1$$

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Ví dụ

- **Bước 3.**
- Ta có:

$$f(M_1)=f(1;0)=1^2+2.0^2-1=0$$

- Tương tự:

$$f(M_2)=f(-1;0)=(-1)^2+2.0^2-(-1)=2$$

$$f(M_3)=f\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4};\qquad f(M_4)=f\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

$$f(M_5)=f\left(\frac{1}{2};0\right)=-\frac{1}{4}$$

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Ví dụ

- So sánh giá trị hàm số tại M1, M2, M3, M4, M5 ta có:

$$\min_D f=f(M_5)=f\left(\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}$$

$$\max_D f=f(M_3)=f(M_4)=f\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Khái niệm hàm ẩn

- Cho phương trình F(x,y)=0
- Nếu với mỗi giá trị của x ta chỉ tìm được duy nhất một giá trị của y thỏa mãn phương trình trên thì F(x,y)=0 xác định một hàm ẩn y theo x.
- Kí hiệu: $y=y(x),\ x\in(a;b)$
- Nếu giải được phương trình F(x,y)=0 để có thể biểu diễn y theo x bằng biểu thức thì ta có thể đưa y về dạng hàm tường minh.

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Ví dụ

- Cho phương trình:

$$F(x,y)=x+y^3-1=0$$

- Giải phương trình này ta có được hàm của y theo x:

$$y=\sqrt[3]{1-x}$$

- Ta nói phương trình x+y^3-1=0 xác định hàm ẩn y theo x trong R.

$$y=\sqrt[3]{1-x}$$

Bài giảng Toán Cao cấp 1 Nguyễn Văn Tiến

Ví dụ

- Cho phương trình:

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

- Với mỗi giá trị của x ta có:

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

- Ta nói phương trình $x^2+y^2-1=0$ không xác định hàm ẩn nào của y theo x.

Khái niệm hàm ẩn

- Trong nhiều trường hợp, mặc dù ta có thể chứng minh được rằng phương trình F(x,y)=0 xác định một hàm số y=y(x) nhưng ta không thể biểu diễn y theo x một cách trực tiếp. Trong trường hợp đó ta phải xét hàm số y gián tiếp dưới dạng phương trình F(x,y)=0.
- Kí hiệu y=y(x) chỉ mang ý nghĩa hình thức để nói y là hàm số của biến số *x.*

Đạo hàm của hàm ẩn

- Giả sử y=y(x) là hàm ẩn xác định bởi phương trình F(x,y)=0. Ta có:

$$y'(x)=\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} \qquad y'_x=\frac{-F'_x}{F'_y}$$

Ví dụ

- Tính đạo hàm của hàm y là hàm ẩn của x xác định bởi phương trình:

$$2x^2+y^2-1=0\ (y\ge 0)$$

- Đ/S:

$$y'_x=\frac{-2x}{y}$$

ỨNG DỤNG HÀM NHIỀU BIẾN TRONG KINH TẾ

Hàm nhiều biến trong kinh tế

- Hàm sản xuất
- Hàm tổng chi phí, tổng doanh thu, tổng lợi nhuận
- Hàm lợi ích
- Hàm cung, hàm cầu

Hàm sản xuất

- Hàm sản xuất là hàm dạng:

Q=Q(K,L)

- trong đó K là vốn, L là lao động.
- Hàm Cobb-Douglas là hàm sản xuất dạng:

$$Q = aK^{\alpha}L^{\beta},$$

- trong đó a, α, β là hằng số dương.

Hàm tổng chi phí, tổng doanh thu, tổng lợi nhuận

- Hàm tổng chi phí là hàm TC=TC(Q) nếu tính theo các yếu tố sản xuất thì:

$$TC=W_K K+W_L L+C_0$$

- trong đó W_K là giá thuế một đơn vị vốn, W_L là giá thuế đơn vị lao động, C_0 là chi phí cố định.
- Hàm tổng doanh thu là hàm TR=PQ=PQ(K,L) trong đó P là giá thị trường của sản phẩm.
- Hàm tổng lợi nhuận là hàm TT=TR-TC

Hàm lợi ích

- Người ta dùng biến lợi ích *u* để biểu diễn mức độ ưa thích của người tiêu dùng đối với mỗi tổ hợp hàng hóa trong cơ cấu tiêu dùng. Mỗi tổ hợp hàng hóa gọi là một giỏ hàng. Giả sử cơ cấu của người tiêu dùng có 3 mặt hàng thì mỗi giỏ hàng là một bộ ba số thực (x,y,z). Hàm lợi ích cho tương ứng mỗi giỏ hàng với một giá trị duy nhất u=u(x,y,z)

Hàm cung, hàm cầu

- Giả sử thị trường có n loại hàng hóa với giá trị tương ứng là $P_1, P_2,\dots,P_n$. Khi đó
- Hàm cung:

$$Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

- Hàm cầu:

$$Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

Đạo hàm riêng và giá trị cận biên

- Xét mô hình hàm kinh tế:

$$w = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$$

- trong đó x_i là các biến số kinh tế.
- Đạo hàm riêng của hàm *w* theo biến x_i tại điểm M được gọi là giá trị *w* – cận biên theo x_i tại điểm đó.
- Biểu diễn lượng thay đổi giá trị của biến *w* khi giá trị x_i thay đổi 1 đơn vị trong điều kiện giá trị các biến độc lập còn lại không thay đổi.

Giá trị cận biên_hàm sx

- **Xét hàm sản xuất: Q=f(K;L)**
- Các đạo hàm riêng:

$$Q'_K = \frac{\partial f}{\partial K}(K,L); \quad Q'_L = \frac{\partial f}{\partial L}(K,L)$$

- được gọi tương ứng là hàm sản phẩm cận biên của tư bản (MPK) và hàm sản phẩm cận biên của lao động (MPL) tại điểm (K, L)

Giá trị cận biên_hàm sx

- Đạo hàm riêng: $Q'_K = \frac{\partial f}{\partial K}(K,L)$
- Biểu diễn xấp xỉ lượng sản phẩm hiện vật gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị tư bản và giữ nguyên mức sử dụng lao động.
- Đạo hàm riêng: $Q'_L = \frac{\partial f}{\partial L}(K,L)$
- Biểu diễn xấp xỉ lượng sản phẩm hiện vật gia tăng khi sử dụng thêm một đơn vị lao động và giữ nguyên mức sử dụng tư bản.

Ví dụ

- Giả sử hàm sản xuất của một doanh nghiệp là:

$$Q = 20K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$

- trong đó *K, L, Q* là mức sử dụng tư bản, mức sử dụng lao động và sản lượng hàng ngày. Giả sử doanh nghiệp đó đang sử dụng 16 đơn vị sản phẩm và 81 đơn vị lao động trong một ngày tức là K=16; L=81. Xác định sản lượng cận biên của tư bản và lao động tại điểm đó và giải thích ý nghĩa.

Giá trị cận biên_hàm lợi ích

- Cho hàm lợi ích:

$$U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- Đạo hàm riêng:

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1,n})$$

- MU_i gọi là hàm lợi ích cận biên của hàng hóa thứ i.
- Biểu diễn xấp xỉ lợi ích tăng thêm khi người tiêu dùng có thêm một đơn vị hàng hóa thứ *i* trong điều kiện số đơn vị các hàng hóa khác không thay đổi.

Ví dụ

- Giả sử hàm tiêu dùng hàng ngày của một người tiêu dùng đối với 2 loại hàng hóa là.

$$U = 2x_1^{\frac{3}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$$

- Trong đó x_1, x_2 là mức sử dụng hàng hóa 1 và hàng hóa 2, *U* là lợi ích của người tiêu dùng hàng ngày.
- Giả sử người tiêu dùng đang sử dụng 64 đơn vị hàng hóa 1 và 25 đơn vị hàng hóa 2 trong một ngày. Xác định lợi ích cận biên của các hàng hóa tại điểm đó và giải thích ý nghĩa.

Hệ số co giãn riêng

- Cho hàm kinh tế $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$.
- Hệ số co giãn của của hàm *w* theo biến x_i tại điểm M là số đo lượng thay đổi tính bằng phần trăm của *w* khi x_i thay đổi 1% trong điều kiện giá trị của các biến độc lập khác không đổi, được ký hiệu và xác định như sau:

$$\varepsilon_{x_i}^f = \frac{\partial f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i^0}{f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)} \quad voi\ M\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$$

Ví dụ

- Giả sử hàm cầu của hàng hóa 1 trên thị trường hai hàng hóa có liên quan có dạng:

$$Q_{1d} = 6300 - 2p_1^2 - \frac{5}{3}p_2^2$$

- p1, p2: giá của hàng hóa 1, 2.

a) Xác định hệ số co giãn của cầu theo giá p1 đối với giá của hàng hóa đó tại (p1,p2)
b) Xác định hệ số co giãn của cầu theo giá p2 đối với giá của hàng hóa thứ hai tại (p1,p2)
c) Xác định hệ số co giãn của cầu theo giá (p1,p2), và cho biết ý nghĩa của tại điểm (20,30).

Giải

- Ta có:

$$\varepsilon_{p_1}^{Q_{1d}} = -4p_1.\frac{p_1}{6300-2p_1^2-\frac{5}{3}p_2^2}; \quad \varepsilon_{p_2}^{Q_{1d}} = -\frac{10}{3}p_2.\frac{p_2}{6300-2p_1^2-\frac{5}{3}p_2^2}$$

- Tại điểm (20,30) ta có: $\varepsilon_{p_1}^{Q_{1d}} = -0,4; \quad \varepsilon_{p_2}^{Q_{1d}} = -0,75$
- Điều đó có nghĩa khi hàng hóa 1 đang ở mức giá 20 và hàng hóa 2 ở mức giá 30 nếu tăng giá hàng hóa 1 lên 1% còn giá hàng hóa 2 không đổi thì cầu đối với hàng hóa 1 sẽ giảm 0,4%. Tương tự, nếu giá của hàng hóa 1 không đổi nhưng giá hàng hóa 2 tăng thêm 1% thì cầu đối với hàng hóa 1 cũng giảm 0,75%.

Quy luật lợi ích cận biên giảm dần

- Xét hàm kinh tế hai biến số z=f(x,y)
- $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ là hàm cận biên của hàm kinh tế trên theo biến *x*.
- $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ là hàm cận biên của hàm kinh tế trên theo biến *y*.

Quy luật lợi ích cận biên giảm dần

- Trong kinh tế học, quy luật lợi ích cận biên giảm dần nói rằng
- Giá trị *z* – cận biên của biến *x* giảm dần khi *x* tăng và *y* không đổi.
- Giá trị *z* – cận biên của biến *y* giảm dần khi *y* tăng và *x* không đổi
- **Chú ý**: chúng ta xét trong điều kiện giá trị của các biến *x, y* đủ lớn.

Quy luật lợi ích cận biên giảm dần

- **Cơ sở toán học:**
- $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ là hàm số giảm khi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ là hàm số giảm khi $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) < 0$

Ví dụ

- Hàm sản xuất của một doanh nghiệp có dạng Cobb – Douglas như sau:

$$Q = aK^{\alpha}L^{\beta} \quad (a,\alpha,\beta > 0)$$

- Tìm điều kiện của α, β để hàm số trên tuân theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần.

Hàm thuần nhất

- Hàm số z=f(x,y) được gọi là hàm thuần nhất cấp *k* nếu với mọi t>0 ta có:

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y)$$

- **Ví dụ:** hàm $Q=a.K^{\alpha}.L^{\beta}$ là hàm thuần nhất cấp (α+β) vì với mọi t>0 ta có:

$$Q(tK,tL) = a(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}\left(aK^{\alpha}L^{\beta}\right) = t^{\alpha+\beta}Q(K,L)$$

Ví dụ

- Các hàm sau có là hàm thuần nhất không? Tìm cấp tương ứng.

$$a)\ Q = \frac{1}{9}K + \frac{4}{9}K^{0,5}L^{0,5} + \frac{4}{9}L$$

$$b)\ z = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Hiệu quả theo quy mô sản xuất

- **Xét hàm sản xuất Q=f(K;L)**
- trong đó K, L là yếu tố đầu vào, *Q* là yếu tố đầu ra.
- **Bài toán đặt ra là**: Nếu các yếu tố đầu vào K, L tăng gấp *m* lần thì đầu ra *Q* có tăng gấp *m* lần hay không ?
- Ta tiến hành so sánh:

$$Q(mK, mL) \quad vs \quad mQ(K, L)$$

Hiệu quả theo quy mô sản xuất

- Nếu Q(mK; mL)>m.Q(K;L) thì hàm sản xuất có hiệu quả tăng theo quy mô.
- Nếu Q(mK; mL)<m.Q(K;L) thì hàm sản xuất có hiệu quả giảm theo quy mô.
- Nếu Q(mK; mL)=m.Q(K;L) thì hàm sản xuất có hiệu quả không đổi theo quy mô.

Hiệu quả của quy mô với bậc thuần nhất

- Giả sử hàm sản xuất Q=f(K;L) là hàm thuần nhất cấp *k*.
- + Nếu k>1 thì hàm sản xuất có hiệu quả tăng theo quy mô.
- + Nếu k<1 thì hàm sản xuất có hiệu quả giảm theo quy mô.
- + Nếu k=1 thì hàm sản xuất có hiệu quả không đổi theo quy mô.

Ví dụ

- Xét vấn đề hiệu quả theo quy mô của các hàm sản xuất sau:

$$a)\ Q = \frac{1}{9}K + \frac{4}{9}K^{0,5}L^{0,5} + \frac{4}{9}L$$

$$b)\ Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$$

Cực trị hàm kinh tế – VD1

- Một xí nghiệp sản xuất độc quyền 2 loại sản phẩm. Biết hàm cầu về 2 loại sản phẩm của xí nghiệp trong một đơn vị thời gian là:

$$Q_1 = \frac{1230 - 5P_1 + P_2}{14},\ Q_2 = \frac{1350 + P_1 - 3P_2}{14}$$

- và hàm tổng chi phí xét trong một đơn vị thời gian là

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

- Tìm mức sản lượng để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

Cực trị hàm kinh tế – VD1

- Hướng dẫn:
- Ta có:

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{1230-5P_1+P_2}{14} \\ Q_2 = \dfrac{1350+P_1-3P_2}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5P_1 - P_2 = 1230 - 14Q_1 \\ P_1 - 3P_2 = -1350 + 14Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 360 - 3Q_1 - Q_2 \\ P_2 = 570 - Q_1 - 5Q_2 \end{cases}$$

- Hàm tổng doanh thu:

$$TR = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (360 - 3Q_1 - Q_2)Q_1 + (570 - Q_1 - 5Q_2)Q_2$$
$$TR = -3Q_1^2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 360Q_1 + 570Q_2$$

Cực trị hàm kinh tế – VD1

- Hàm tổng chi phí:

$$TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

- Hàm lợi nhuận:

$$\pi = TR - TC = -3Q_1^2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 360Q_1 + 570Q_2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2$$
$$\pi = -4Q_1^2 - 3Q_1Q_2 - 6Q_2^2 + 360Q_1 + 570Q_2$$

- Hệ pt tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} \pi'_{Q_1} = -8Q_1 - 3Q_2 + 360 = 0 \\ \pi'_{Q_2} = -3Q_1 - 12Q_2 + 570 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 30 \\ Q_2 = 40 \end{cases}$$

Cực trị hàm kinh tế – VD1

- Ta có:

$$\pi''_{Q_1Q_1} = -8 \qquad \pi''_{Q_1Q_2} = -3 \qquad \pi''_{Q_2Q_2} = -12$$
$$A = -8 < 0;\ \Delta = (-8)(-12) - (-3)^2 = 87 > 0$$

- Vậy lợi nhuận đạt cực đại tại Q1=30; Q2=40

Cực trị hàm kinh tế – VD2

- Cho hàm lợi nhuận của một công ty đối với một sản phẩm là: $\pi = R - C = PQ - wL - rK$
- trong đó *π* là lợi nhuận, *R* là doanh thu, *C* là chi phí, *L* là lượng lao động, *w* là tiền lương cho một lao động, *K* là tiền vốn, *r* là lãi suất của tiền vốn, *P* là đơn giá bán sản phẩm.
- Giả sử *Q* là hàm sản xuất Cobb – Douglas dạng:

$$Q = L^{1/3}.K^{1/3}$$

- Ta tìm *L, K* để lợi nhuận đạt tối đa cho trường hợp *w = 1, r = 0,02, P = 3.*

Cực trị hàm kinh tế – VD3

- Cho biết hàm lợi nhuận của một doanh nghiệp sản xuất 3 loại sản phẩm là:

$$\pi = -Q_1^2 - 3Q_2^2 - 7Q_3^2 + 300Q_2 + 1200Q_3 + 4Q_1Q_3 + 20$$

- Hãy tìm mức sản lượng Q_1, Q_2, Q_3 để doanh nghiệp thu được lợi nhuận tối đa.
- Đáp số: Q_1=400; Q_2=50; Q_3 =200

Cực trị hàm kinh tế – VD4

- Một hãng độc quyền sản xuất 2 loại sản phẩm. Cho biết hàm cầu đối với hai loại sản phẩm đó như sau:

$$Q_1 = 1300 - p_1 \qquad Q_2 = 675 - 0,5p_2$$

- Với hàm chi phí kết hợp là:

$$C = Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + Q_2^2$$

- Hãy cho biết mức sản lượng Q1, Q2 và giá bán tương ứng để doanh nghiệp đó thu lợi nhuận tối đa.

Đáp án

- Ta có:

$$Q_1 = 250; \qquad p_1 = 1050$$
$$Q_2 = 100; \qquad p_2 = 1150$$

Cực trị hàm kinh tế – VD5

- Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm ở hai cơ sở với hàm chi phí tương ứng là:

$$TC_1 = 128 + 0,2Q_1^2; \qquad TC_2 = 156 + 0,1Q_2^2$$

- Q1, Q2 lần lượt là lượng sản xuất của cơ sở 1,2.
- Hàm cầu ngược về sản phẩm của công ty có dạng:

$$P = 600 - 0,1Q; \text{ trong do } Q = Q_1 + Q_2 < 600$$

- A) Xác định lượng sản phẩm cần sx ở mỗi cơ sở đề tối đa hóa lợi nhuận.
- B) Tại mức sản lượng tối đa hóa lợi nhuận, hãy tính độ co giãn của cầu theo giá.

Đáp án

- A) Q1=600; Q2=1200
- B) Hệ số co giãn của cầu theo giá: -13/6

Cực trị hàm kinh tế – VD6

- Một doanh nghiệp có hàm sản xuất:

$$Q = K^{0,5} + L^{0,5} \ \left(K > 0; L > 0\right)$$

- Giả sử giá thuê một đơn vị vốn là 6\$, giá thuê một đơn vị lao động là 4\$. Giá bán một sản phẩm là 2\$.
- Tìm mức sử dụng vốn và lao động để lợi nhuận của doanh nghiệp tối đa.
- Đáp số: K=1/36; L=1/16

Cực trị có điều kiện – VD1

- Cho hàm lợi ích tiêu dùng đối với 2 loại hàng hóa:

$$U(x,y) = x^{0,4}.y^{0,6}$$

- (*x* là số đơn vị hàng hóa 1, *y* là số đơn vị hàng hóa 2; x>0, y>0).
- Giả sử giá các mặt hàng tương ứng là 2USD, 3USD và thu nhập dành cho người tiêu dùng là 130USD. Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng để người tiêu dùng thu được lợi ích tối đa.

Cực trị có điều kiện – VD2

- Một trung tâm thương mại có doanh thu phụ thuộc vào thời lượng quảng cáo trên đài phát thanh (*x* phút) và trên đài truyền hình (*y* phút). Hàm doanh thu:

$$R(x,y) = 320x - 2x^2 - 3xy - 5y^2 + 540y + 2000$$

- Chi phí cho mỗi phút quảng cáo trên đài phát thanh là 1 triệu đồng, trên đài truyền hình là 4 triệu đồng. Ngân sách chi cho quảng cáo là B=180 triệu đồng.
- a) Tìm *x, y* để cực đại doanh thu.
- b) Nếu ngân sách chi cho quảng cáo tăng 1 triệu đồng thì doanh thu cực đại tăng lên bao nhiêu ?

Bài tập 1

- Một doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q=40K^{0,75}L^{0,25}$ trong đó Q_sản lượng; K_vốn; L_lao động. Doanh nghiệp thuê một đơn vị vốn là 3$; một đơn vị lao động là 1$. Ngân sách chi cho yếu tố đầu vào là B=160$.
- A) Với hàm sản xuất trên khi tăng quy mô sản xuất thì hiệu quả thay đổi như thế nào? Nếu K tăng lên 1%; L tăng lên 3% thì sản lượng tăng lên bao nhiêu % tại mỗi mức (K,L)?

Bài tập 1

- B) Xác định mức sử dụng vốn và lao động để sản lượng tối đa. Nếu tăng ngân sách chi cho yếu tố đầu vào 1$ thì sản lượng tối đa tăng lên bao nhiêu đơn vị?
- C) Hàm số trên có tuân theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần hay không?
- D) Xác định hàm sản lượng cận biên theo vốn, theo lao động?

Đáp án

- A) Hiệu quả không đổi
- Sản lượng tăng 1,5%
- B) K=L=40; Qmax=1600
- Tăng yếu tố đầu vào thì Qmax tăng khoảng 10 đơn vị
- C) Q tuân theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần

Bài tập 3

- Một doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q=K^{0,4}L^{0,3}$ (Q: sản lượng, K: vốn và L: lao động)
- A) Hãy đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.
- B) Giả sử thuê tư bản là 4$, giá thuê lai động là 3$ và doanh nghiệp tiến hành sản xuất với ngân sách cố định là 1050$. Hãy cho biết doanh nghiệp đó sử dụng bao nhiêu đơn vị tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động thì thu được sản lượng tối đa.

Đáp án

- A) Hiệu quả theo quy mô
- B) Q(150;150) là lớn nhất.

KIỂM TRA 30PH

Bài 1.

- 1.1 Tìm các giới hạn sau:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^{2x}\right)\left(1-\cos x\right)}{x^3+4\sin x} \qquad b)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos 3x\right)}{\ln\left(1+3\sin^2 x\right)}$$

- 1.2 Tìm a để hàm số có đạo hàm tại 0:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^x & ,x\geq 0 \\ x^2+ax+1 & ,x<0 \end{cases}$$

Bài 2.

- Một doanh nghiệp đưa vào thị trường sản phẩm A có thông tin như sau:
- Hàm cầu là: P=600-2Q
- Hàm chi phí là: TC=0,2Q^2+28Q+200
- A) Tìm mức sản xuất Q để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa. Khi ấy giá bán và lợi nhuận đạt được là bao nhiêu.
- B) Nếu mỗi đơn vị sản lượng Q công ty phải nộp thuế 22 đơn vị tiền tệ thì sản lượng và giá bán là bao nhiêu để công ty đạt lợi nhuận tối đa. Khi ấy lợi nhuận là bao nhiêu.