Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

$$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}},$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$.

Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, ta luôn có: $8a(1 + cos\alpha) + b^3(1 - cos\alpha) = 0 \Rightarrow cos\alpha = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S = \dfrac{1}{4} . \dfrac{b^2}{|a|} \sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C : x^2 + y^2 - (c + n)x + c.n = 0$, với $n = \dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a}$.

1 cực trị: $ab \geq 0$	*3 cực trị:* $ab < 0$
✓ $a > 0$: 1 cực tiểu ✓ $a < 0$: 1 cực đại	✓ $a > 0$: 1 cực đại,2 cực tiểu ✓ $a < 0$: 2 cực đại,1 cực tiểu

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị $A \in Oy, B, C$ tạo thành:

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC	VÍ DỤ
Tam giác vuông cân	$8a + b^3 = 0$	m? để hàm số $y = x^4 + (m + 2015)x^2 + 5$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân. *Với* $a = 1, b = m + 2015$. *Từ* $8a + b^3 = 0 \Rightarrow b^3 = -8 \Rightarrow m = -2017$
Tam giác đều	$24a + b^3 = 0$	m? để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m - 2017)x^2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều. *Với* $a = \frac{9}{8}, b = 3(m - 2017)$. *Từ* $24a + b^3 = 0 \Rightarrow b^3 = -27 \Rightarrow m = 2016$

$\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = 0$	m? để hàm số $y = 3x^4 + (m-7)x^2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 120^0. *Với* $a = 3, b = m-7$. *Từ* $8a + 3b^3 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow m = 5$.
$S_{\triangle ABC} = S_0$	$32a^3S_0^2 + b^5 = 0$	m? để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 + m - 2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1. *Với* $a = m, b = 2$. *Từ* $32a^3S_0^2 + b^5 = 0 \Rightarrow m^3 + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$.
$\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$	m? để hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất. *Với* $a = 1, b = -2(1-m^2)$. *Từ* $S_0 = \sqrt{(1-m^2)^5} \leq 1 \Rightarrow m = 0$
$r_{\triangle ABC} = r_0$	$r_0 = \dfrac{b^2}{\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)}$	m? để hàm số $y = x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. *Với* $a = \dfrac{1}{2}, b = -m$. *Từ* $r_0 \Rightarrow m = 2$

$BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$	m? để hàm số $y = m^2x^4 - mx^2 + 1 - m$ có 3 cực trị mà trong đó có $BC = \sqrt{2}$ *Với* $a = m^2, b = -m$. *Từ* $am_0^2 + 2b = 0 \Rightarrow m = 1$ *vì* $m > 0$
$AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8b = 0$	m? để hàm số $y = mx^4 - x^2 + m$ có 3 cực trị mà trong đó có $AC = 0,25$ *Với* $a = m, b = -1$. *Từ* $16a^2n_0^2 - b^4 + 8b = 0 \Rightarrow m = 3$ *do* $m > 0$
$B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$	m? để hàm số $y = x^4 - mx^2 + 1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có $B, C \in Ox$ *Với* $a = 1, b = -m, c = 1$. *Từ* $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m = 2$ *do* $m > 0$
Tam giác cân tại A	Phương trình qua điểm cực trị	$BC: y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$
Tam giác có 3 góc nhọn	$8a + b^3 > 0$	m? để hàm số $y = -x^4 - (m^2 - 6)x^2 + m + 2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có 3 góc đều nhọn *Với* $a = -1, b = -(m^2 - 6)$.

		Từ $8a+b^3>0\Rightarrow b>2\Rightarrow -2<m<2$
Tam giác có trọng tâm O	$b^2-6ac=0$	m? để hàm số $y=x^4+mx^2-m$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm. *Với* $a=1,b=m,c=-m$. *Từ* $b^2-6ac=0\Rightarrow m=-6$ *do* $m<0$
Tam giác có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$	m? để hàm số $y=x^4+mx^2+m+2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có trực tâm O. *Với* $a=1,b=m,c=m+2$. *Từ* $b^3+8a-4ac=0\Rightarrow m=-2$ *do* $m<0$
$R_{\Delta ABC}=R_0$	$R_0=\dfrac{b^3-8a}{8\|a\|b}$	m? để hàm số $y=mx^4+x^2+2m-1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nội tiếp trong đường tròn có bán kính $R=\dfrac{9}{8}$ *Với* $a=m,b=1$. *Từ* $R_0=\dfrac{b^3-8a}{8\|a\|b}\Rightarrow m=-1$ *do* $m<0$
Tam giác cùng O tạo hình thoi	$b^2-2ac=0$	m? để hàm số $y=2x^4+mx^2+4$ có 3 cực trị cùng gốc tọa độ O lập thành hình thoi. *Với* $a=2,b=m,c=4$. *Từ* $b^2-2ac=0\Rightarrow m=-4$ *do* $m<0$

Tam giác, tâm O nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$	m? để hàm số $y=mx^4+2x^2-2$ có 3 cực trị lập thành tam giác có O là tâm đường tròn nội tiếp. *Với* $a=m, b=2, c=-2$. *Từ* $b^3-8a-4abc=0 \Rightarrow m=-1$ *do* $m<0$
Tam giác, tâm O ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$	m? để hàm số $y=-mx^4+x^2-2m-1$ có 3 cực trị lập tam giác có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. *Với* $a=-m, b=1, c=-2m-1$. *Từ* $b^3-8a-8abc=0 \Rightarrow m=0,25$ *do* $m>0$

Hàm số $y=ax^4+2bx^2+c$ có 3 cực trị $A\in Oy, B, C$ tạo thành:

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC	VÍ DỤ
Tam giác vuông cân tại A	$a+b^3=0$	m? để hàm số $y=x^4+2(m+2016)x^2+2016m-2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân. *Với* $a=1, b=m+2016$. *Từ* $a+b^3=0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow m=-2017$

Tam giác đều	$3a+b^3=0$	m? để hàm số $y=9x^4+2(m-2020)x^2+2017m+2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều. *Với* $a=9,b=m-2020$. *Từ* $3a+b^3=0\Rightarrow b=-3\Rightarrow m=2017$
$\widehat{BAC}=\alpha$	$a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$	m? để hàm số $y=3x^4+2(m-2018)x^2+2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 120^0. *Với* $a=3,b=m-2018$. *Từ* $a+b^3.\tan^2 60^0=0\Rightarrow b=-1\Rightarrow m=2017$
$S_{\Delta ABC}=S_0$	$a^3S_0^2+b^5=0$	m? để hàm số $y=mx^4+4x^2+2017m-2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. *Với* $a=m,b=2$. *Từ* $a^3S_0^2+b^5=0\Rightarrow m=-1$
$R_{\Delta ABC}=R_0$	$R_0=\frac{1}{2\lvert a\rvert}\left(b^2-\frac{a}{b}\right)$	m? để hàm số $y=mx^4-2x^2+2017m^3-2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính ngoại tiếp bằng 1. *Với* $a=m,b=-1$. *Từ* $R_0=\frac{1}{2\lvert a\rvert}\left(b^2-\frac{a}{b}\right)\Rightarrow m=1$

$r_{\Delta ABC} = r_0$	$r_0 = \dfrac{b^2}{\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)}$	m? để hàm số $y = x^4 + 2(m+5)x^2 + 2016m^3 + 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính nội tiếp bằng 1. Với $a = 1, b = m+5, r_0 = 1 \Rightarrow b \in \{-2;1\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} m = -7 \\ m = -4 \end{matrix}\right.$

Tiệm cận: Tổng khoảng cách từ điểm M trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đến 2 tiệm cận đạt

$$\min d = 2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$$

Tương giao: Giả sử $d: y = kx + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M, N.

Với $kx + m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ thỏa điều kiện $cx + d \neq 0$, có $\Delta = B^2 - 4AC$

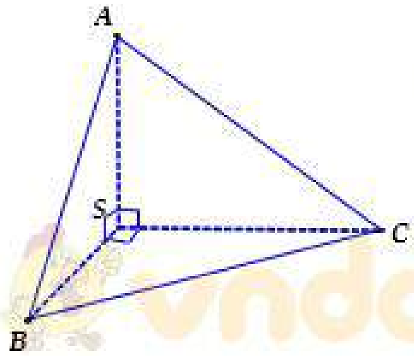
$MN = \sqrt{\dfrac{k^2+1}{A^2}\Delta}$, MN ngắn nhất khi tồn tại $\min\Delta$, $k = const$	ΔOMN cân tại O $(x_1 + x_2)(1 + k^2) + 2km = 0$	ΔOMN vuông tại O $x_1x_2(1 + k^2) + (x_1 + x_2)km + m^2 = 0$

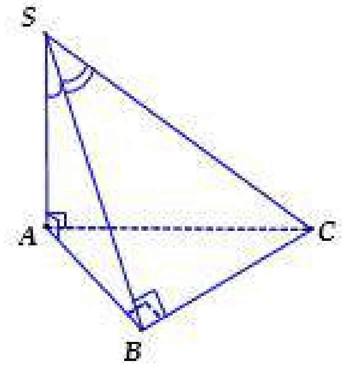
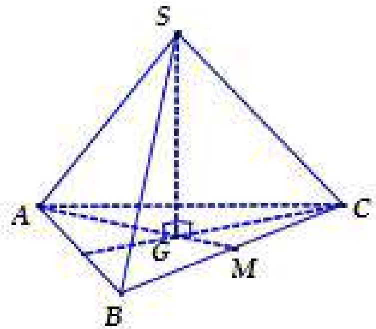
Khối đa diện: loại $\{n, p\}$ có D đỉnh, C cạnh, M mặt thì $n.M = p.D = 2.C$ hoặc

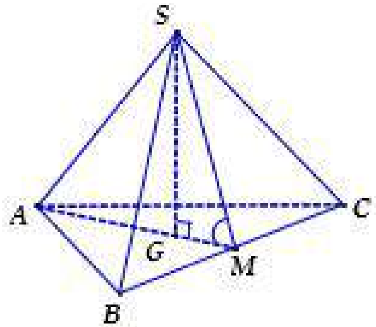
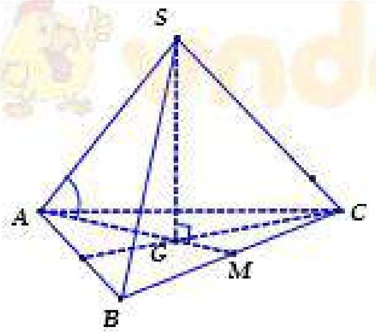
$Euler: D + M = 2 + C$.

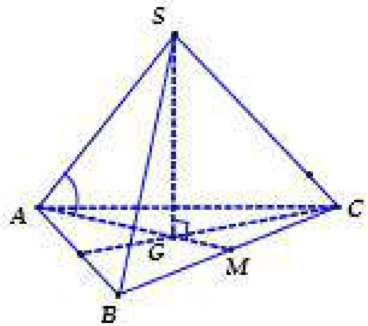
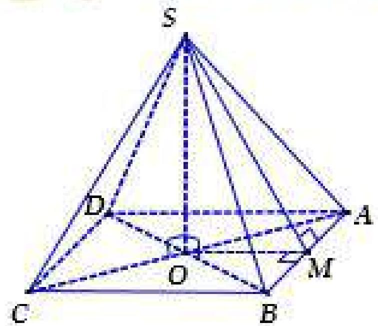
Khối đa diện đều	**Số đỉnh**	**Số cạnh**	**Số mặt**	**Kí hiệu**	**Thể tích**
Tứ diện đều	4	6	4	$\{3,3\}$	$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)a^3$
Khối lập phương	8	12	6	$\{4,3\}$	$V = a^3$
Khối bát diện đều	6	12	8	$\{3,4\}$	$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)a^3$
Khối thập nhị diện (12 mặt) đều	20	30	12	$\{5,3\}$	$V = \frac{\left(15 + 7\sqrt{5}\right)a^3}{4}$
Khối nhị thập diện (20 mặt) đều	12	30	20	$\{3,5\}$	$V = \frac{\left(15 + 5\sqrt{5}\right)a^3}{12}$

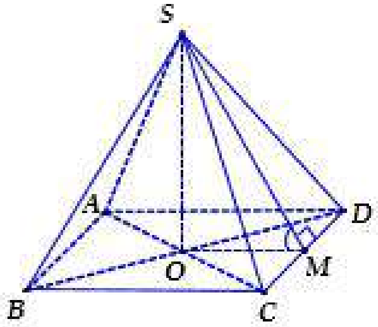
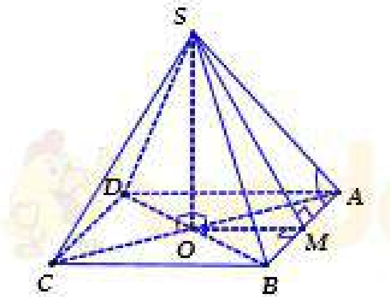
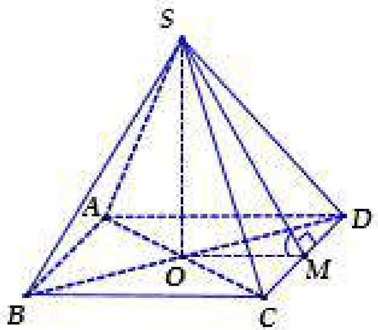
Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan thể tích khối chóp

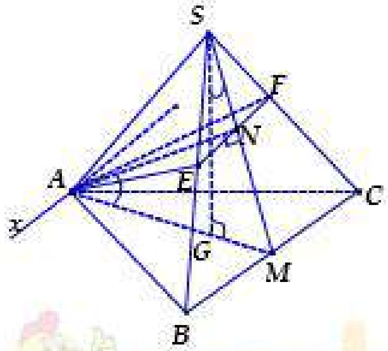
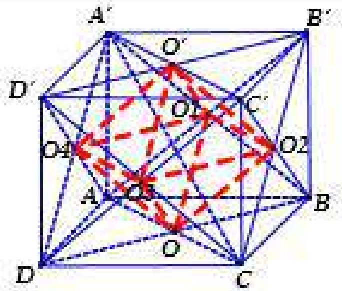
TÍNH CHẤT	HÌNH VẼ	VÍ DỤ
Cho hình chóp $SABC$ với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3}$	 	Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là $15cm^2, 20cm^2, 18cm^2$. Thể tích khối chóp là: A. $a^3\sqrt{20}$ B. $\frac{a^3\sqrt{20}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{20}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{20}}{6}$ $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3} = a^3\sqrt{20}$ ***Chọn đáp án A.***

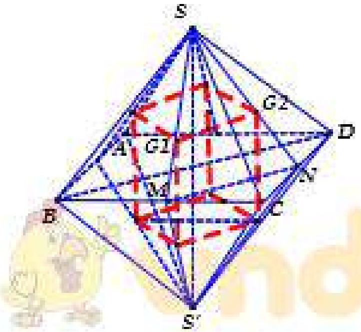
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC}=\alpha, \widehat{ASB}=\beta$. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$		Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB=a\sqrt{3}$, $\widehat{BSC}=45^\circ$, $\widehat{ASB}=30^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: **A.** $\dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ $V_{S.ABC}=\dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}=\dfrac{3a^3}{8}$ ***Chọn đáp án A.***
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$		Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng a. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: **A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ $a=b\Rightarrow V_{SABC}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\tan\alpha}{24}$		Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là : **A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **B.** $\dfrac{a^3}{24}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3}{12}$ $V_{SABC}=\dfrac{a^3\tan\alpha}{24}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta\cos^2\beta}{4}$		Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng 2 và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là : **A.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{3}{4}$ $V_{S.ABC}=\dfrac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta\cos^2\beta}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ***Chọn đáp án A.***

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3.\tan\beta}{12}$		Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là : **A.** $\dfrac{a^3}{48}$ **B.** $\dfrac{a^3}{24}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ $V_{SABC} = \dfrac{a^3\tan\beta}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$. Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$		Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: **A.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3.\tan\alpha}{6}$	 	Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: **A.** $\dfrac{a^3}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{a^3}{6}$ $V_{SABCD} = \dfrac{a^3\tan\alpha}{6} = \dfrac{a^3}{6} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB} = \alpha$, với $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6}$	 	Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $\widehat{SAB} = 60^0$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: **A.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{a^3}{6}$ $V_{SABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ ***Chọn đáp án B.***
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó:	 	Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng 1, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: **A.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{4}{27}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$		$V_{S.ABCD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{27} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\cot\alpha}{24}$		Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: **A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{8}$ $V_{SABC} = \dfrac{a^3\cot 30^0}{24} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A***
Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó: $V = \dfrac{a^3}{6}$		Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a có thể tích là: **A.** $\dfrac{a^3}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{a^3}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Cho khối tám mặt đều cạnh a. Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương. Khi đó: $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{27}$		Cho khối tám mặt đều cạnh a. Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương có thể tích bằng V. Tỷ số $\dfrac{a^3}{V}$ gần nhất giá trị nào trong các giá trị sau? **A.** 9,5 **B.** 7,8 **C.** 15,6 **D.** 22,6 $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{27} \Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = \dfrac{27\sqrt{2}}{4} \approx 9,5$ ***Chọn đáp án A.***