

BÀI GIẢNG SỐ 1. CÁC PHÉP TOÁN VỀ LŨY THỪA VÀ LOGARIT

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Công thức về lũy thừa với số mũ thực.

Với các số thực dương $a, b > 0$, m, n là hai số thực bất kì, ta có các tính chất cơ bản sau:

- ✓ $a^m a^n = a^{m+n}$. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- ✓ $a^m b^m = (ab)^m$. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.
- ✓ $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$).

2. Công thức biến đổi logarit

2.1. Cho $0 < a \neq 1, b > 0$. Ta có các công thức sau

i) $\log_a 1 = 0$. ii) $\log_a a = 1$. iii) $a^{\log_a b} = b$. iv) $\log_a a^b = b$.

2.2. Cho $0 < a \neq 1, b_1 > 0, b_2 > 0$. Ta có các công thức sau

a) $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ b) $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

2.3. Cho $0 < a \neq 1, b > 0$. Ta có

a) $\forall \alpha, \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$. b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$. c) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

2.4. Cho $0 < a \neq 1, b > 0$.

Ta có $\forall 0 < c \neq 1, \log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$.

Và các công thức đổi cơ số sau:

a) $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$. b) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b \neq 1$. c) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$.

B. HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC TRÊN LỚP

1. Khởi động

Học sinh điền đúng (T), sai (F) hoặc không chắc chắn (N) vào các mệnh đề sau:

Trước bài học	Các mệnh đề	Sau bài học
	$a^{x^2} = (a^x)^2$ ($a > 0$).	

	$\sqrt[3]{4\sqrt{a^{24}b^{12}}} = a^2b$	
	$a^{\log_2 b} = 2^{\log_a b} \quad (a, b > 0, a \neq 1).$	
	$a^{\log_2 b} = b^{\log_2 a} \quad (a, b > 0).$	
	$\log_a b = \log_{a^2} b^2 \quad (0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1)$	

2. Giáo viên hướng dẫn học sinh làm các ví dụ sau đây

Ví dụ 1: Tính giá trị biểu thức:

a) $A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} - 25^{0.5}$ c. $C = \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$

b) $B = 25^{\frac{1}{2} + \log_1 27 + \log_{125} 81}$ d. $P = \frac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - \log_3 2 \cdot \log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}$

Ví dụ 2: Cho $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$. Chứng minh rằng $ab + 5(a - b) = 1$.

Ví dụ 3: So sánh hai số

a) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[3]{63}$. b. $2e^{2017} - 2017 \cdot 2019$ và $2e^{2016} - 2016 \cdot 2018$.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $M = \left(25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_2 \left(\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)$.

Ví dụ 5: Chứng minh đẳng thức sau: $\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$.

3. Học sinh tự làm các bài tập trên lớp sau đây:

3.1. Bài tập tự luận

Bài luyện số 1: Tính giá trị của các biểu thức số sau

a) $A = 81^{-0.75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}}$ b. $B = \log_{\frac{1}{3}} 7 + 2\log_9 49 - \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{7}$

Bài luyện số 2: So sánh hai số trong các trường hợp sau

a). $1 + \sqrt[3]{63}$ và $\sqrt{5} + \sqrt[3]{30}$ b. $2^{\log_6 3}$ và $3^{\log_6 \frac{1}{2}}$

Bài luyện số 3: Tính giá trị của biểu thức $N = 36^{\log_6 5} + 10^{-\log_2 \frac{1}{2}} - 3^{\log_9 36}$.

Bài luyện số 4: Giả sử các biểu thức đã cho có nghĩa. Chứng minh:

$$a) \log_{ax}(bx) = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}.$$

$$b) \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^k} x} = \frac{k(k+1)}{2 \log_a x}.$$

3.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. B. $a^m \cdot b^n = (ab)^{mn}$. C. $ka^m = (ka)^m$. D. $a^{m+n} = (a^n)^m$.

Câu 2: Cho các mệnh đề sau: 1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$. ($0 < a \neq 1, b, c > 0$).

2) $\log_{a^2} b^2 = \log_a b$ ($a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0$). 3) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ($b > 0, 0 < a \neq 1$).

Số mệnh đề đúng là:

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2018} (4\sqrt{3} - 7)^{2017}$.

A. $P = 1$. B. $P = -7 - 4\sqrt{3}$. C. $P = 7 + 4\sqrt{3}$. D. $P = (7 - 4\sqrt{3})^{2017}$.

Câu 4: Cho $\log_a b < 0$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $0 < a < b < 1$. B. $0 < b < 1 \leq a$. C. $0 < a < 1 < b$. D. $a > b > 1$.

Câu 5: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $0 < a \neq 1, b \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_{a^2} \frac{a}{b^2} = \frac{1}{2} - \log_a b$. B. $\log_{a^2} (ab)^2 = 1 + \log_a b$.
C. $\log_{a^2} \frac{a}{b^2} = \frac{1}{2 \log_a |b|}$. D. $\log_{a^2} (ab)^2 = 1 + \log_a |b|$.

Câu 6: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(x - 1) + \log_2(x + 1)$ khi $|x| > 1$. B. $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 2 \log_2(x - 2)$.
C. $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$ ($x, y > 0$). D. $\log_{x^3} \sqrt{x} = \frac{1}{6}$ ($x > 0, x \neq 1$).

Câu 7: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\log_a b = 3, \log_a c = 4$. Tính giá trị của biểu thức $M = \log_{\sqrt{a}} b \sqrt{c}$.

A. 10. B. $\frac{11}{2}$. C. 22. D. 7.

Câu 8: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b \leq a^2$. Mệnh đề nào sau đây *sai*?

A. $1 < \log_a b \leq 2$. B. $\log_a b + \log_b a \geq 2$. C. $\log_a b^2 + \log_b a^2 \leq 5$. D. $\log_a b > \log_b a$.

Câu 9: Cho a, b, x là các số thực dương và khác 1 và các mệnh đề:

Mệnh đề (I): $\log_{a^b} x^b = \log_a x$

Mệnh đề (II): $\log_a \left(\frac{ab}{x} \right) = \frac{\log_b a + 1 - \log_b x}{\log_b a}$

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. (I) sai, (II) đúng. B. (I), (II) đều sai. C. (I), (II) đều đúng. D. (I) đúng, (II) sai.

Câu 10. Cho hai số thực dương x, y bất kỳ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_2(x^2 y) = 2\log_2 x + \log_2 y$ B. $\log_2(x^2 + y) = 2\log_2 x \cdot \log_2 y$

C. $\log_2 \frac{x^2}{y} = \frac{2\log_2 x}{\log_2 y}$ D. $\log_2(x^2 y) = \log_2 x + 2\log_2 y$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

1. Bài tập tự luận

Bài tập số 1: Tính giá trị của các biểu thức sau đây

a) $A = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}} + (9^0)^2$. b) $B = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

c) $C = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2\log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{5}$. d) $D = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$.

Bài tập số 2: a) Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a .

b) Cho $\log_a x = p, \log_b x = q, \log_{abc} x = r$. Hãy tính $\log_c x$ theo p, q, r .

Bài tập số 3: Cho $0 < a \neq 1$. Tìm giá trị bằng số của các biểu thức

a) $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$. b) $(2a)^{\log_{\sqrt{a}} 1}$. c) $a^{4\log_{a^2} 5}$.

Bài tập số 4: Hãy so sánh $\sqrt{15} + \sqrt[3]{7}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho các số thực $a, b > 0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Tìm mệnh đề đúng

A. $a^{x+y} = a^x + a^y$. C. $(a+b)^x = a^x + b^x$. B. $a^x b^y = (ab)^{xy}$. D. $(a/b)^x = a^x b^{-x}$.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = (\sqrt{5}-2)^{2018} (9+4\sqrt{5})^{1010}$.

A. $9+2\sqrt{5}$. B. $9+4\sqrt{5}$. C. $\sqrt{5}+2$. D. $\sqrt{5}-2$.

Câu 3. Tìm mệnh đề sai?

A. $(4-x)\sqrt{\frac{x}{x-4}} = \sqrt{x(x-4)}$ với $x > 4$. B. $\sqrt{(a-3)^4} = (a-3)^2$ với $\forall a \in \mathbb{R}$.

C. $\sqrt{9a^2b^4} = -3ab^2$ với $a \leq 0$.

D. $\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b^2}$ với $a \geq 0, \sqrt{a-b} \neq 0$.

Câu 4: Giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(\frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$ bằng:

A. 3.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{9}{5}$.

D. 2.

Câu 5: Đặt $\log_2 5 = a, \log_5 3 = b$. Biểu diễn $\log_{10} 75$ theo a và b là:

A. $2a^2b^2$.

B. $\frac{a(b+2)}{a+1}$.

C. $\frac{a(b+2)}{2}$.

D. $\frac{3a+b+1}{a+1}$.

Câu 6. Cho $\log_a 27 = \frac{1}{2a}$. Tính $\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a}$ theo a .

A. $\frac{1}{3}a$

B. $3a$

C. $\frac{1}{2}a$

D. $2a$

Câu 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$.

Tính giá trị biểu thức $T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25}$

A. $T = 76 + \sqrt{11}$

B. $T = 31141$

C. $T = 2017$

D. $T = 469$

Câu 8. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}}$

A. 8.

B. 10.

C. 9.

D. 12.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $R = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$:

A. $\frac{2a}{3}$

B. $\frac{3a}{2}$

C. $2a$

D. $a^{-\frac{1}{2}}$

Câu 10. Với giá trị nào của m, n thì biểu thức sau không đổi với mọi $a, b > 0$. Tính $m+n$?

$$A = 3m \log_5 \left(\sqrt[5]{a^3 b} \right) - 4n \log_{25} \left(\frac{a^{-10}}{\sqrt[6]{b^5}} \right)^{\frac{1}{5}} + \log_5 \frac{a}{b}$$

A. $\frac{137}{27}$.

B. $\frac{101}{27}$.

C. $\frac{185}{102}$.

D. $\frac{155}{102}$.