SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn thi : **TOÁN** ***(chuyên Tin)***
Ngày thi : *08 tháng 6 năm 2018*
Thời gian làm bài : *150 phút*

Bài I *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $x^2+2x+7=(x+3)\sqrt{x^2+5}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=1\\(x+y)(x^2+y^2)=1\end{cases}$.

Bài II *(2,5 điểm)*

1) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $4x^2+8xy+3y^2+2x+y+2=0$.

2) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $3a^2+a=4b^2-b$. Chứng minh $a+b$ là một số chính phương.

Bài III *(1,5 điểm)*

1) Với x,y,z là các số thực thay đổi và thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$$

2) Với x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz\ge 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}$.

Bài IV *(3,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, đường cao BE và nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng BE cắt các đường thẳng AD và AO lần lượt tại các điểm I và H.

1) Chứng minh $BH.BI=2R^2$.

2) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Lấy điểm N thuộc tia đối của tia OA sao cho $ON=\frac{R}{2}$. Chứng minh tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi K là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI.

Bài V *(1,0 điểm)*

Trên một đường tròn cho 2018 điểm phân biệt. An và Bình cùng chơi trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ nối 2 điểm trong 2018 điểm đã cho để được một dây cung sao cho dây cung vừa được vẽ không có điểm chung với bất kì dây cung nào đã vẽ trước đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người đi trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

.... Hết ....

ĐÁP ÁN KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT 2018 – 2019
MÔN TOÁN (Chuyên Tin)

Bài 1.

1, Giải phương trình

$$x^2+2x+7=(x+3)\sqrt{x^2+5}\quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+7-3x-9=(x+3)\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\Leftrightarrow x^2-x-2=\frac{(x+3)\left(x^2+5-9\right)}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=\frac{(x+3)(x+2)(x-2)}{\sqrt{x^2+5}+3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\(x+3)(x+2)=(x+1)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\quad(2)\end{array}\right.$$

$$(2)\Leftrightarrow x^2+5x+6=(x+1)\sqrt{x^2+5}+3x+3\Leftrightarrow x^2+2x+3=(x+1)\sqrt{x^2+5}$$

Lấy (1) trừ đi (2) được:

$$4=2\sqrt{x^2+5}\Leftrightarrow 2=\sqrt{x^2+5}\Leftrightarrow x^2=-1\quad (L)$$

Đáp số $x=2$

2, Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-y)\left(x^2-y^2\right)=1\\(x+y)\left(x^2+y^2\right)=1\rightarrow(x+y)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(x-y)^2=1\quad(1)\\(x+y)\left(x^2+y^2\right)=1\quad(2)\end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) ta được:

$$(x+y).2xy=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\y=0\\x=-y\quad(L)\end{array}\right.$$

$+\ x=0$ hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}-y.\left(-y^2\right)=0\\y.y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow y^3 1\Leftrightarrow y=1$

$+\ y=0$ hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=1\\x^3=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy hệ có nghiệm $(0;1),(1;0)$

Bài 2.

1. Tìm cặp số nguyên (x;y)

$$4x^2+8xy+3y^2+2x+y+2=0\Leftrightarrow 4x^2+2x[4y+1]+3y^2+y+2=0$$

$$\Delta'_x=(4y+1)^2-4\left(3y^2+y+2\right)=4y^2+4y+1-8=(2y+1)^2-8=p^2$$

Là một số chính phương để $x\in Z$

Xét $(2y+1)^2-p^2=8\Leftrightarrow(2y+1+p)(2y+1-p)=8$

Vì $2y+1+p+2y+1-p=4y+2$ chẵn nên $2y+1+p,\ \ 2y+1-p$ cùng tính chẵn lẻ

Ta có: $8=2.4=4.2=(-2).(-4)=(-4).(-2)$

2y +1 + p	2	-2	4	-4
2y + 1 – p	4	-4	2	-2
y	1	-2	1	-2
x	-1	2	-1	2

Vậy cặp (x, y) thỏa mãn là (-1;1) và (2; -2)

2, Chứng minh

$a,b\in Z^{+}$

$3a^2+a=4b^2-b\Leftrightarrow 3a^2-3b^2+a+b=b^2\Leftrightarrow (a+b)(3a-3b+1)=b^2$

Giả sử a + b có một ước nguyên tố p $\Rightarrow b^2\,\vdots\, p\Rightarrow b\,\vdots\, p\Rightarrow b^2\,\vdots\, p^2$ và 3a – 3b + 1 không chia hết cho p. Nên $a+b\,\vdots\, p^2$

Vậy a + b luôn là số chính phương.

Bài 3.

a, Chứng minh

$xyz=1\rightarrow z=\dfrac{1}{xy}\quad (x,y,z\neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{\frac{y}{xy}+y+1}+\frac{1}{\frac{x}{xy}+\frac{1}{xy}+1}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{xy}{xy+x+1}=1$$

b, Tìm giá trị lớn nhất

Ta có: $x,y,z>0\rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq (a+b+c)^2$ (bổ đề)

$xyz\geq 1\Rightarrow z\geq \dfrac{1}{xy}$

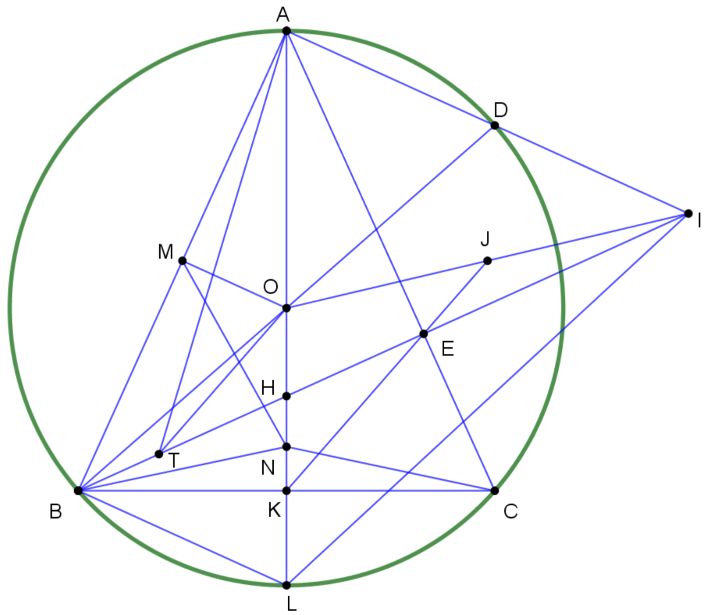
$$\Rightarrow \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+z+1}\leq \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{y.\frac{1}{xy}+z+1}+\frac{1}{x.\frac{1}{xy}+\frac{1}{xy}+1}=1$$

$$\Rightarrow P^2=\left(\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}\right)^2\leq 3\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+z+1}\right)\leq 3$$

$\Rightarrow P_{max}=\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} xyz=1 \\ xy+x+1=yz+y+1=zx+z+1 \end{cases}\Rightarrow x=y=z=1$

Bài 4.



a, Có AB = AC nên $AO \perp BC$ tại trung điểm K của BC, nên H là trực tâm của tam giác ABC. Nên $AHI = ACB = ADB$ nên tứ giác HODI nội tiếp. $\Delta BOH \sim \Delta BID(g.g)$ nên $BH.BI = BO.BD = 2R^2$

b, Gọi AL là đường kính của (O), có OMBL là hình thang vuông, N là trung điểm OL nên NM = NB = NC. Nên $NMB = NBM = NCA$ hay tứ giác AMNC nội tiếp.

c, Gọi J là giao điểm của KE và OI. Gọi T đối xứng I qua E, có $ATE = AIE = BOH \Rightarrow ATB = AOB$ nên tứ giác AOTB nội tiếp. Nên $OTH = OAB = HEK$ suy ra OT // KE, mà E là trung điểm IT nên J là trung điểm OI.

Bài 5.

Giả sử có 2n điểm (n = 1009)

Chiến thuật:

An nối điểm thứ 1 với điểm thứ n + 1. Cứ Bình nối 1 dây 1 bên thì An nối dây bên còn lại. An luôn nối được cuối nên An thắng.