

Bài 1. (2,5 đ) Cho biểu thức : $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right)$

- Rút gọn P;
- Tính giá trị của P khi $x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$;
- Tìm x để $P < 1$;

Bài 2. (2đ) Hai tổ công nhân dự định làm 700 sản phẩm trong một tháng. Nhưng do tổ I làm vượt mức kế hoạch 15%, tổ II làm vượt mức kế hoạch 20% nên cả hai tổ đã làm vượt mức kế hoạch 120 sản phẩm. Tính số sản phẩm mà mỗi tổ dự định làm trong một tháng?

Bài 3. (1,5 đ) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương;
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ mà $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Bài 4. (3,5đ) Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Điểm C di động trên nửa đường tròn (C \neq A, B), gọi M là điểm chính giữa cung AC. BM cắt AC tại H và cắt tia tiếp tuyến Ax của nửa (O) tại K, AM cắt BC tại D.

- Chứng minh: $\triangle ABD$ cân đỉnh B;
- Chứng minh: Các tứ giác DMHC và AKDB nội tiếp;
- Tứ giác AKDH là hình gì? Tại sao?
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD cắt đường tròn (B; BA) tại N. Chứng minh: A, C, N thẳng hàng.

Bài 5. (0,5đ) Cho $0 \leq a, b, c \leq 2, a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a^2 + b^2 + c^2$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2,5 điểm) a) Rút gọn $P = \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ (ĐK: $x \geq 0; x \neq 1$) (1,25 đ)

b) $x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1$ (0,25 đ)

Khi đó : $P = \frac{4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 + 1}{\sqrt{3} + 1 - 1} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 3$ (0,5 đ)

a) $P < 1 \Leftrightarrow P - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - 1 < 0$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} < 0$ mà $x+2 > 0$

$\forall x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ (0,5 đ)

Bài 2. Gọi số sản phẩm tổ I, II dự định làm trong một tháng là x, y (đv: sp ; đk: $x, y \in \mathbb{N}^*$)

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 700 \\ \frac{15}{100}x + \frac{20}{100}y = 120 \end{cases} \quad (1 \text{ đ})$$

Giải hệ phương trình $\Rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 300 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện). Trả lời. (1 đ)

Bài 3. a) Để ... $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ c/a < 0 \\ -b/a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} < 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases}$ (vì $c/a < 0$ thì $\Delta' > 0$) (0,25 đ)

*) $\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \quad |m| < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$ (0,25 đ)

$$\Leftrightarrow 2bc + 2ac + 2ab - abc - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) \geq 4 + abc \geq 4$$

$$\text{Vì } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2(ab + ac + bc) \leq 9 - 4$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 5.$$