Ngô Quang Chiến

VẤN ĐỀ 1: TỔNG QUAN VỀ HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu
a) Cho hàm số $y = f(x); \exists f'(x)$ trên D: $f'(x) > 0 (f'(x) < 0); \forall x \in D \Rightarrow f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D.   **b)** Cho hàm số $y = f(x); \exists f'(x)$ trên khoảng $(a;b)$: $f'(x) \geq 0 (f'(x \leq 0); \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến)trên $(a;b)$, với $f'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm của D. Đây là định lý mở rộng cho định lý trên và áp dụng mạnh hơn trong các trường hợp biện luận tính đơn điệu của hàm số , điều kiện khi đó đối với hàm đa thức thì sẽ lấy được dấu bằng, còn hàm phân thức thì không lấy được dấu bằng .
2. Cực trị
a) (ĐỊNH LÝ LA-GRĂNG) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $\exists f'(x)$ trên khoảng $(a;b) \Rightarrow \exists c \in (a;b)$ sao cho: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ hay $\dfrac{f(b) - f(a)}{(b-a)} = f'(c)$ **b)** Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow x_0$ là điểm cực trị của hàm số, hay x_0 là điểm thuộc tập xác định D ; $f(x_0)$ là giá trị cực trị của hàm số; điểm $M(x_0; f(x_0))$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số.   **c)** Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (đ/lí FERMAT)   **<u>Chú ý :</u>**   +) Đạo hàm có thể triệt tiêu tại điểm x_0 nhưng hàm số không đạt cực trị tại đó, nên điều ngược lại định lý trên không đúng , ví dụ hàm số $y = 5$ có đạo hàm bằng 0 tại mọi điểm x_0 nào đó, nhưng rõ ràng hàm này luôn không đổi nên không tồn tại cực trị.   +) Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó không có đạo hàm, ví dụ hàm số $y = \|x\| = \sqrt{x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ nên đạo hàm không tồn tại 0, nhưng $y = \|x\| \geq 0, \forall x$, hàm số có giá trị cực tiểu là 0 tại $x = 0$.   +) Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc không tồn tại đạo hàm của hàm số .   **d)** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $D = (x_o - h; x_o + h)$ và $\exists f'(x) \in D$ hoặc trên $D \backslash \{x_0\}, \forall h > 0$ thì $f'(x) < 0 (f'(x) > 0)$; $\forall x \in (x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$; $\forall x \in (x_0; x_0 + h) \Rightarrow x_0$ là CĐ (hoặc CT)

e) Giả sử hàm số $y = f(x)$, $\exists f''(x) \in D = (x_0 - h; x_0 + h), \forall h > 0$,khi đó:

+) $f'(x_0) = 0; f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ là CT, đồ thị hàm số lõm trên khoảng đó

+) $f'(x_0) = 0; f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ là CĐ, đồ thị hàm số lồi trên khoảng đó

+) $x_0 \in D; f''(x_0)$ đổi dấu qua $x_0 \Rightarrow M(x_0; f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị

VẤN ĐỀ 2: CÁC LOẠI HÀM SỐ

LOẠI 1: Hàm số bậc 3 : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

LÝ THUYẾT VÀ TÍNH CHẤT

+) Hàm số có cực đại, cực tiểu : $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$

+) Hàm số luôn đồng biến trên R : $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

+) Hàm số luôn nghịch biến trên R : $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

+) Phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị của đồ thị :

$$y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a} = \frac{\left(6ac - 2b^2\right)x + 9ad - bc}{9a}$$

Cách khác : Viết phương trình đường thẳng

Gọi Δ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

Ta có : $\Delta = \frac{1}{9}\left(9ay - \frac{y''}{2}.y'\right)$, *thật vậy :*

* $y' = 3ax^2 + 2bx + c; y'' = 6ax + 2b$

* $y = \left(\frac{3ax + b}{9a}\right)(3ax^2 + 2bx + c) \Rightarrow 9ay = \frac{y''}{2}.y' + Ax + B$, *ta không cần quan tâm A, B có dạng gì , ta tìm A, B :*

**Nhập vào CASIO* $T(x) = 9ay - \frac{y''}{2}.y'$*,CALC 0 ta thu được B :* $T(0) = B$

**Lưu* $T(0) = B$*, CALC 1 rồi trừ đi B thu được A :* $T(1) - T(0) = A$

+) Hàm số luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm, và đồ thị hàm số nhận điểm uốn $(x_0; y(x_0))$ làm tâm đối xứng, với $y''(x_0) = 0$

Ngô Quang Chiến

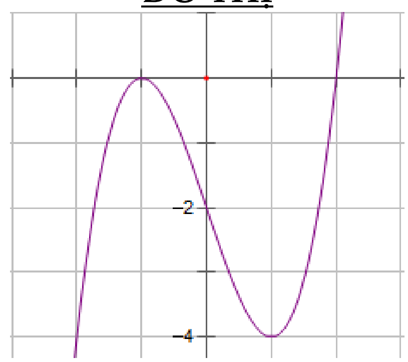
+) M thuộc (C), nếu M là điểm uốn thì có đúng một tiếp tuyến của (C) qua M và tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất ($a>0$), lớn nhất ($a<0$), M khác điểm uốn thì có hai tiếp tuyến qua M

+)Đồ thị (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt lập thành một CSC khi : $\begin{cases} y\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=0 \\ y_{CT}.y_{CD}<0 \end{cases}$

BẢNG BIẾN THIÊN | **ĐỒ THỊ**

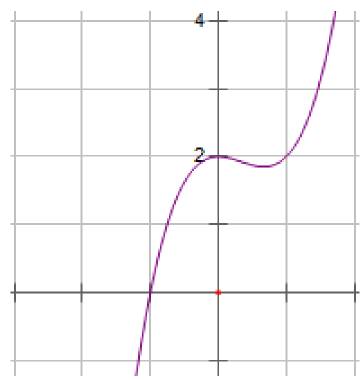
+) $a>0, \Delta'=b^2-3ac>0$, hàm số có 2 cực trị:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		◎	0	-	0	+	
y			CĐ				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				CT		



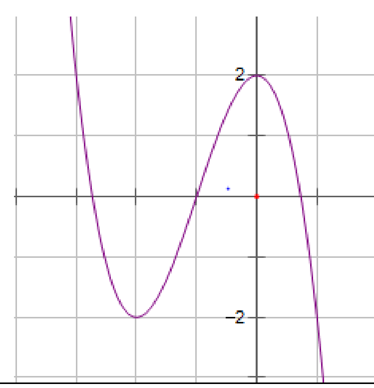
+) $a>0, \Delta'=b^2-3ac\le 0 \Leftrightarrow y'\ge 0$, hàm số luôn tăng trên R :

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y			$+\infty$
		↗	
	$-\infty$		



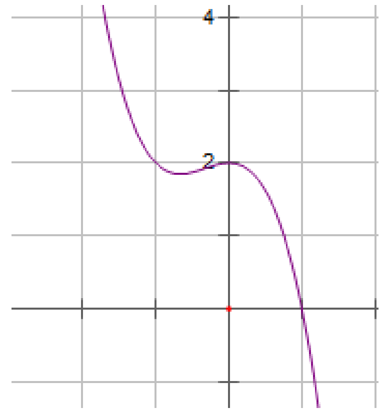
+) $a<0, \Delta'=b^2-3ac>0$, hàm số có 2 cực trị :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				CĐ		
		↘		↗		↘	
			CT				$-\infty$



+) $a<0$, $\Delta' = b^2-3ac \le 0 \Leftrightarrow y' \le 0$, hàm số luôn giảm trên R :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
y′	-
y	$+\infty$ ↘ $-\infty$



LOẠI 2: Hàm số bậc 4 trùng phương : $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \ne 0)$

<u>LÝ THUYẾT VÀ TÍNH CHẤT</u>

+) Hàm số có 1 cực trị : $ab \ge 0$ (đồ thị không có điểm uốn).

* $a>0$: 1 cực tiểu

* $a<0$: 1 cực đại

+) Hàm số có 3 cực trị : $ab<0$ (đồ thị có 2 điểm uốn).

* $a>0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu

* $a<0$: 1 cực tiểu, 2 cực đại

*Xét : $\Delta = b^2 - 4ac$, hàm số có 3 cực trị A, B, C với

$$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};\frac{-\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};\frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

* Gọi $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$

* Diện tích tam giác ABC : $S = \dfrac{1}{4}.\dfrac{b^2}{|a|}.\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$

* Phương trình đường cong đi qua 3 cực trị A, B, C của đồ thị :

$x^2 + y^2 - (c+n)x + cn = 0$ với $n = \dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a}$

<u>Cách khác : viết phương trình đường cong</u>

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx; y' = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\dfrac{b}{2a}x$ *,mà* $y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow (C): y = ax.x^3 + bx^2 + c$

$= x.(-\dfrac{b}{2a}x) + bx^2 + c \Rightarrow (C): y = (b - \dfrac{b}{2a})x^2 + c$.

+) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành một CSC khi phương trình $aX^2+bX+c=0$ có hai nghiệm dương phân biệt thoả mãn $X_1=9X_2$.

+) Nếu đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị thì đường thẳng d′ đối xứng với d qua trục Ox cũng là tiếp tuyến của đồ thị .

+) Bài toán tham số với hàm số có 3 cực trị .(Nguồn : Thầy Nguyễn Phú Khánh)

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC	VÍ DỤ
Tam giác vuông cân	$8a+b^3=0$	$m=?$ hàm số $y=x^4+(m+2015)x^2+5$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, với $a=1,b=m+2015$. $\Rightarrow 8a+b^3=0 \Leftrightarrow 8+(m+2015)^3=0 \Leftrightarrow m=-2017$
Tam giác đều	$24a+b^3=0$	$m=?$hàm số $y=\frac{9}{8}x^4+3(m-2017)x^2$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác đều, với $a=\frac{9}{8},b=3(m-2017)$ $\Rightarrow 24a+b^3=0 \Leftrightarrow 27+27(m-2017)^3=0 \Leftrightarrow m=2016$
$\angle BAC=\alpha$	$8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$	$m=?$ hàm số $y=3x^4+(m-7)x^2$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác có một góc 120^0 , với $a=3,b=m-7$. $\Rightarrow 8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0 \Leftrightarrow 24+(m-7)^3.3=0 \Leftrightarrow m=-5$
$S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3(S_0)^2+b^5=0$	$m=?$ hàm số $y=mx^4+2x^2+m-2$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1 , với $a=m,b=2$. $\Rightarrow 32a^3(S_0)^2+b^5=0 \Leftrightarrow 32m^3+32=0 \Leftrightarrow m=-1$
$\text{Max}(S_{\Delta ABC})$	$S_{\Delta ABC}=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$ sau đó biện luận	$m=?$ hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích max , với $a=1,b=-2(1-m^2)$ $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}=\sqrt{(1-m^2)^5}\le 1 \Rightarrow Max(S_{\Delta ABC}) \Leftrightarrow m=0$
$R_{\Delta ABC}=R_0$	$R_0=\frac{b^3-8a}{8\|a\|b}$	$m=?$ hàm số $y=mx^4+x^2+2m-1$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác nội tiếp đường tròn bán kính $R=\frac{9}{8}$, với $a=m,b=1$. $\Rightarrow R_0=\frac{1-8m}{8\|m\|}=\frac{9}{8} \Leftrightarrow m=-1$ do $m<0$
$r_{\Delta ABC}=r_0$	$r_0=\frac{b^2}{\|a\|\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{a}}\right)}$	$m=?$ hàm số $y=x^4+mx^2+\frac{3}{2}$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác ngoại tiếp đường tròn bán kính $r=1$, với $a=1,b=-m$.

		$\Rightarrow r_0 = \dfrac{b^2}{\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)} = \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}} = 1 \Leftrightarrow m = 2$
$BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$	$m = ?$ hàm số $y = m^2x^4 - mx^2 + 1 - m$ có 3 cực trị trong đó $BC = \sqrt{2}$, với $a = m^2, b = -m$. $\Rightarrow am_0^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 1$ vì $m \neq 0$
$AB = AC$ $= n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8b = 0$	$m = ?$ hàm số $y = mx^4 - x^2 + m$ có 3 cực trị trong đó $AC = \dfrac{1}{4}$, với $a = m, b = -1$. $\Rightarrow 16a^2n_0^2 - b^4 + 8b = 0 \Leftrightarrow m = 3$ do $m > 0$
$B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$	$m = ?$hàm số $y = x^4 - mx^2 + 1$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác có $B, C \in Ox$, với $a = 1, b = -m$ $\Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow m = 2$ do $m > 0$
Tam giác ABC cân	Phương trình qua điểm cực trị :	$BC: y = -\dfrac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)^3 x + c$
Tam giác ABC nhọn	$8a + b^3 > 0$	$m = ?$ hàm số $y = -x^4 - (m^2 - 6)x^2 + m + 2$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác nhọn , với $a = -1, b = -(m^2 - 6)$. $\Rightarrow 8a + b^3 > 0 \Leftrightarrow b > 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$
O là trọng tâm tam giác ABC	$b^2 - 6ac = 0$	$m = ?$ hàm số $y = x^4 + mx^2 - m$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác nhận O làm trọng tâm , với $a = -1, b = m, c = -m$. $\Rightarrow b^2 - 6ac = 0 \Leftrightarrow m = -6$ do $m < 0$
O là trực tâm tam giác ABC	$8a + b^3 - 4ac = 0$	$m = ?$ hàm số $y = x^4 + mx^2 + m + 2$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác trực tâm O , với $a = 1, b = m, c = m + 2$. $\Rightarrow 8a + b^3 - 4ac = 0 \Leftrightarrow m = -2$ do $m < 0$
O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC	$b^3 - 8a - 8abc = 0$	$m = ?$ hàm số $y = -mx^4 + x^2 - 2m - 1$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác nội tiếp đường tròn tâm O , với $a = -m, b = 1, c = -2m - 1$ $\Rightarrow b^3 - 8a - 8abc = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$ do $m > 0$
Góc ở đỉnh của tam giác cân : φ	$\cos\varphi = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$	Công thức mở rộng cho trường hợp điều kiện tam giác tạo từ 3 điểm cực trị là : đều, vuông, hay có một góc bất kì

O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC	$b^3-8a-4abc=0$	$m=?$ hàm số $y=mx^4+2x^2-2$ có 3 cực trị tạo thành một tam giác ngoại tiếp đường tròn tâm O, với $a=m,b=2,c=-2\ \Rightarrow b^3-8a-4abc=0\Leftrightarrow m=-1$ do $m<0$
4 điểm A, B, C, O tạo thành 1 hình thoi	$b^2-2ac=0$	$m=?$ hàm số $y=2x^4+mx^2+4$ có 3 cực trị cùng với O tạo thành hình thoi, với $a=2,b=m,c=4$. $\Rightarrow b^2-2ac=0\Leftrightarrow m=-4$ do $m<0$

BẢNG BIẾN THIÊN

+) $a>0,b<0$ hàm số có 3 cực trị:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

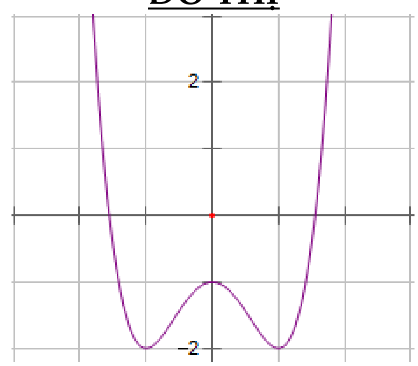
+) $a<0,b>0$ hàm số có 3 cực trị:

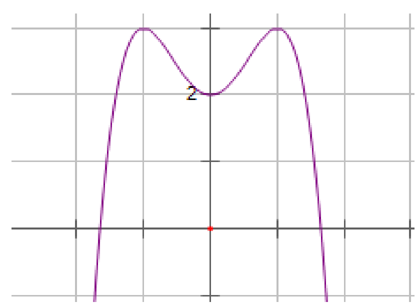
x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	CĐ	↘	$-\infty$

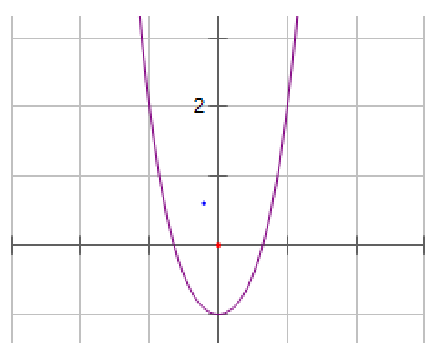
+) $a>0,b\ge 0$ hàm số có 1 cực trị:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

ĐỒ THỊ

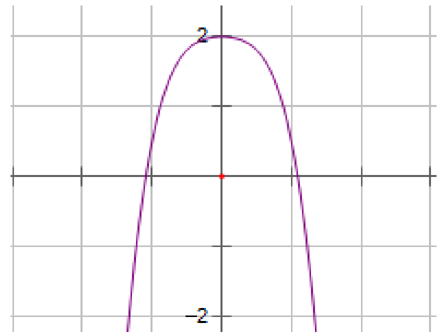






+) $a<0, b\le 0$ hàm số có 1 cực trị:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$ $\nearrow$	CĐ	$\searrow$ $-\infty$



LOẠI 3: Hàm số nhất biến (bậc 1/bậc 1) : $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(ac\ne 0)$

LÝ THUYẾT VÀ TÍNH CHẤT

+)Tập xác định : $D=R\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

+) Đạo hàm : $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, đặt $m=ad-bc$

* $m>0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định .
* $m<0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định .

+) Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$

+)Tổng khoảng cách từ điểm M trên đồ thị đến hai tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất

$$Min(d)=\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$$

+)Tương giao : giả sử $d: y=kx+m$ cắt đồ thị $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tại hai điểm M, N, với $kx+m=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng : $Ax^2+Bx+C=0,(cx+d\ne 0)$ có $\Delta=B^2-4AC$:

* $MN=\sqrt{\dfrac{k^2+1}{A^2}.\Delta}$, MN ngắn nhất khi tồn tại $\min\Delta, k=const$
* ΔOMN cân tại O : $(x_1+x_2)(1+k^2)+2km=0$

* ΔOMN vuông tại O : $(x_1.x_2)(1+k^2)+(x_1+x_2)(1+k^2)km+m^2=0$

+)M thuộc đồ thị (C), tiếp tuyến của đồ thị tại M cắt 2 tiệm cận luôn tạo ra một tam giác có diện tích không đổi .

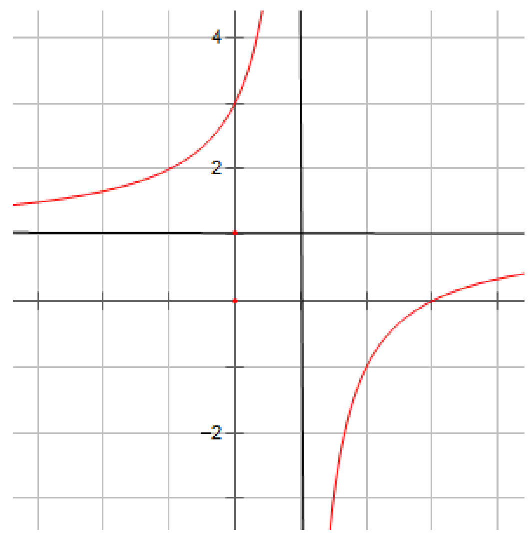
+)Đồ thi hàm số nhất biến gọi là một hypebol vuông góc có tâm đối xứng $I(-\frac{d}{c};\frac{a}{c})$ là giao điểm của hai đường tiệm cận .

+)Hàm số nhất biến không có cực trị

BẢNG BIẾN THIÊN | **ĐỒ THỊ**

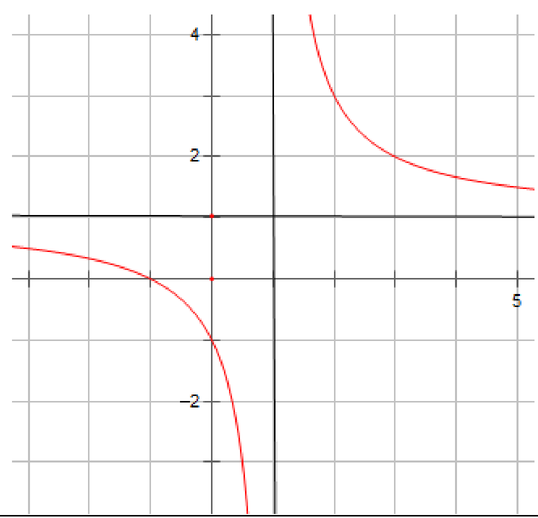
+) $m>0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
y'	+	||	+
y	$\frac{a}{c} \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow \frac{a}{c}$



+) $m<0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
y'	+	||	+
y	$\frac{a}{c} \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow \frac{a}{c}$



Ngô Quang Chiến

CHÚ Ý(áp dụng cho nhưng bài vận dụng nâng cao) :
1) Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ ta suy ra các dạng đồ thị sau : +) $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành . +) $y = f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng qua trục tung . +) $y = -f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng qua gốc toạ độ . +) $y = \|f(x)\|$ bằng cách lấy phần đồ thị phía trên trục hoành, còn phần phía dưới trục hoành thì lấy đối xứng qua trục hoành . +) $y = f(\|x\|)$ là hàm số chẵn, bằng cách lấy phần đồ thị phía bên phải trục tung, rồi lấy phần đối xứng phần đó qua trục tung . **2)** Bài toán biện luận số nghiệm của phương trình dạng $g(x,m)=0$, đưa phương trình về dạng $f(x)=h(m)$ trong đó vế trái là hàm số đang xét đã vẽ đồ thị (C): $y = f(x)$. Số nghiệm là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = h(m)$. Chú ý , do ta đang xét ở đây với m là tham số nên cho dù hàm $y = h(m)$ là hàm số bậc bao nhiêu với m thì cũng chỉ là 1 tham số, và đường thẳng $y = h(m)$ là đường song song hoặc trùng với trục Ox . **3)** Điểm đặc biết của họ đồ thị $(C_m): y = f(x,m)$, với m là tham số +) Điểm cố định của họ đồ thị là điểm mà mọi đồ thị đều đi qua : $M_0(x_0;y_0)\in(C_m),\forall m \Leftrightarrow y_0 = f(x_0,m),\forall m$ +) Điểm mà họ đồ thị không đi qua là điểm mà không có đồ thị nào của họ đi qua với mọi tham số : $M_0(x_0;y_0)\notin(C_m),\forall m \Leftrightarrow y_0 \neq f(x_0,m),\forall m$ Nhóm theo tham số và áp dụng các mệnh đề sau : * $Am+B=0,\forall m \Leftrightarrow A=0,B=0$ * $Am^2+Bm+C=0,\forall m \Leftrightarrow A=0,B=0,C=0$ * $Am+B\neq 0,\forall m \Leftrightarrow A=0,B\neq 0$ * $Am^2+Bm+C\neq 0,\forall m \Leftrightarrow A=0,B=0,C\neq 0$ hoặc $A\neq 0,\Delta = B^2-4ac<0$ +)Hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau khi hệ pt: $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ có nghiệm và nghiệm của hệ là toạ độ tiếp điểm .

Ngô Quang Chiến

VẤN ĐỀ 3: HÀM SỐ MŨ, LOGARIT

LOẠI 1: HÀM SỐ MŨ

1. Hàm luỹ thừa

+)Các đẳng thức cơ bản : (với $a,b>0,\alpha,\beta\in R$)

$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ $\qquad$ $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$ $\qquad$ $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$

$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$

+)Với $\alpha,\beta\in R$

$*\ a>1; a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha>\beta$ $\qquad$ $*\ 0<a<1; a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta$ $\qquad$ $*\ a>0; a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

+) Cho $0<a<b, m\in R$

$*\ a^m < b^m \Leftrightarrow m>0$ $\qquad$ $*\ a^m > b^m \Leftrightarrow m<0$

+) Cho $a,b>0; a\neq b$

$*\ a^\alpha = b^\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ $\qquad$ $*\ a^n < b^n \Leftrightarrow a<b, \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a<b; \forall a,b,n$ lẻ

+)Chú ý :

*Cho số thực $a>0; m,n\in Z, n>0$ thì $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Với $a,b\geq 0; m,n>0; m,n\in Z$ và hai số p, q tuỳ ý :

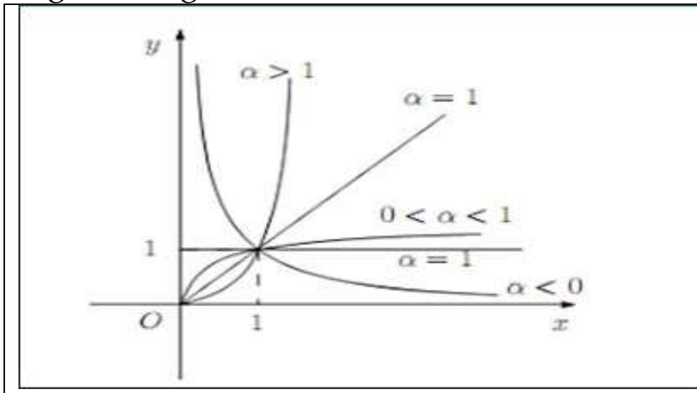
$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b>0)$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ $\qquad$ Nếu $\dfrac{p}{n}=\dfrac{p}{m} \Rightarrow \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a>0)$

*Luỹ thừa với số mũ nguyên âm và mũ không thì cơ số khác không

*Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và số thực thì cơ số dương

+) Bảng biến thiên và đồ thị :



2 . Hàm số mũ

+) Có dạng $y = a^x (0 < a \neq 1)$

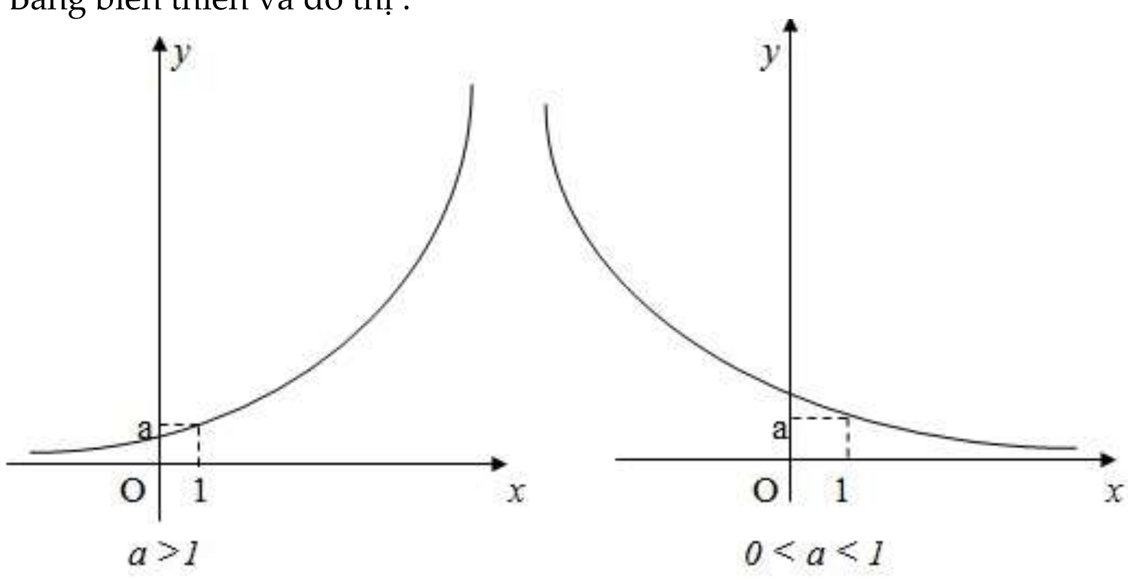
+) Tập xác định : R và tập gía trị $(0;+\infty)$, liên tục trên R

+) Tính đơn điệu : $a > 1$ hàm đồng biến, $0 < a < 1$ hàm nghịch biến

+) Giới hạn : $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x = e$ và $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

+) Đạo hàm : $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ nên ta có $\left(a^u\right)' = a^u \ln a.u'$

+) Bảng biến thiên và đồ thị :



LOẠI 2: HÀM SỐ LOGARIT

1. Công thức Logarit

+) Logarit : Cho $0 < a \neq 1, b > 0$ thì $a^\alpha = b \Leftrightarrow a = \log_a b$

$*\lg b=\alpha \Leftrightarrow b=10^{\alpha}$ $\ln b=\alpha \Leftrightarrow b=e^{\alpha}$

+) Tính chất :

$*\log_a 1=0;\log_a a=1;a^{\log_a \alpha}=\alpha;\log_a a^{\alpha}=\alpha$ $\log_a(b.c)=\log_a b+\log_a c,(b,c>0)$

$*\log_a(\frac{b}{c})=\log_a b-\log_a c,(b,c>0)$ $\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b;\log_{a^{\alpha}} b=\frac{1}{\alpha}\log_a b$

$*\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

2. Hàm số Logarit :

+) Có dạng $y=\log_a x(0<a\neq 1)$

+) Tập xác định : $(0;+\infty)$ và tập gía trị R .

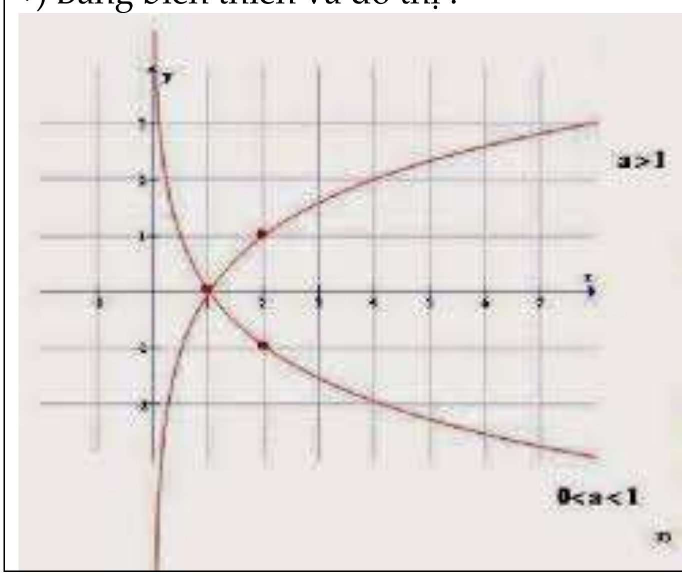
+) Tính đơn điệu : $a>1$ hàm đồng biến, $0<a<1$ hàm nghịch biến

+) Giới hạn : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

+) Đạo hàm : $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\Rightarrow(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}$ mở rộng $(\log_a|u|)'=\frac{u'}{u\ln a}$

Đặc biệt : $(\ln x)'=\frac{1}{x}\Rightarrow(\ln u)'=\frac{u'}{u}$ mở rộng $(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$ $(x,u\neq 0)$

+) Bảng biến thiên và đồ thị :



VẤN ĐỀ 4: TOÁN LÃI XUẤT

LÃI ĐƠN
Gửi a đồng, lãi r%/tháng (lãi đơn). Số tiền A có được sau n tháng $A=a.(1+r.n)$

LÃI KÉP

+)Gửi một lần : gửi a đồng, lãi r%/tháng (lãi kép). Số tiền A có được sau n tháng : $A=a.(1+r)^n$

Ta suy ra được các đại lượng khác như sau: $n=\dfrac{\ln\dfrac{A}{a}}{\ln(1+r)};r=\sqrt[n]{\dfrac{A}{a}}-1;a=\dfrac{A}{(1+r)^n}$

+) Gửi, trả theo định kỳ :

***Gửi vào đầu tháng:** Tháng đầu gửi a đồng, mỗi tháng sau cũng gửi thêm a đồng vào đầu mỗi tháng, lãi r%/tháng.

Số tiền A thu được sau n tháng : $A=\dfrac{a}{r}(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]$

Ta suy ra được các đại lượng khác : $a=\dfrac{A.r}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]};n=\dfrac{\ln(\dfrac{A.r}{a(1+r)}+1)}{\ln(1+r)}$

***Gửi vào cuối tháng:** Tháng đầu gửi a đồng, mỗi tháng sau cũng gửi thêm a đồng vào cuối mỗi tháng, lãi r%/tháng.

Số tiền A thu được sau n tháng : $A=\dfrac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$

Ta suy ra được các đại lượng khác : $a=\dfrac{A.r}{\left[(1+r)^n-1\right]};n=\dfrac{\ln(\dfrac{A.r}{a}+1)}{\ln(1+r)}$

***Trả dần vào cuối tháng (Trả góp):** Vay A đồng, trả a đồng vào cuối mỗi tháng, lãi r%/tháng. Số tiền còn nợ sau n tháng : $A(1+r)^n-\dfrac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$

Để hết nợ sau n tháng thì số tiền a phải trả hàng tháng là:

$$A(1+r)^n - \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] \Leftrightarrow a = \frac{A.r.(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Chú ý : các bài toán về vay tiền, gửi tiền, phức tạp hay đơn giản sẽ dựa vào những bài toán gốc trên để phát triển, vì vây cần hiểu rõ bản chất các bài toán mẫu cho đến cách xây dựng công thức cho từng trường hợp để có thể vận dụng công thức, xử lý bài toán một cách nhanh nhất và hiệu quả .

VẤN ĐỀ 5: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Khối đa diện : loại {n;p} (mỗi mặt có n cạnh, mỗi đỉnh là đỉnh chung của p mặt) có D đỉnh, C cạnh, M mặt thì ta có : n.M = p.D = 2C hay theo Euler D + M = 2 + C

Khối đa diện đều	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Ký hiệu	Thể tích
Tứ diện đều	4	6	4	{3;3}	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Khối lập phương	8	12	6	{4;3}	a^3
Khối bát diện đều	6	12	8	{3;4}	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Khối mười hai mặt đều	20	30	12	{5;3}	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$
Khối hai mươi mặt đều	12	30	20	{3;5}	$\frac{a^3(15+5\sqrt{5})}{12}$

CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH

Hình chóp S.ABC có : $\begin{cases} SA = a, SB = b.SC = c \\ \angle BSC = \alpha, \angle CSA = \beta, \angle ASB = \varphi \end{cases}$

Thể tích $V = \frac{abc}{6}\sqrt{1-(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\varphi) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$

Tứ diện S.ABC có các cạnh đáy BC = a, CA = b, AB = c và góc giữa các mặt bên (SBC), (SCA), (SAB) với mặt đáy (ABC) lần lượt là α,β,φ .

Thể tích khối tứ diện S.ABC : $V=\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{24(a\cot\alpha+b\cot\beta+c\cot\varphi)}$

Tứ diện ABCD có các cạnh đáy AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c, được gọi là tứ diện gần đều có thể tích : $V=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}{2}}$

Bán kính mặt cầu nội tiếp (nếu có) của khối đa diện : $r=\dfrac{3.V}{S_{tp}}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp

Loại 1: **Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới một gốc vuông,** gọi d là độ dài đoạn thẳng đó thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R=\dfrac{d}{2}$

Loại 2 : **Hình chóp đều,** gọi h là độ dài chiều cao của hình chóp, k là chiều dài cạnh bên thì ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp : $R=\dfrac{k^2}{2h}$

Loại 3 : **Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy,** gọi h là chiều cao hình chóp, và R_d là bán kính của đáy thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp : $R=\sqrt{R_d^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}$

Loại 4 : **Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy,** gọi h là chiều cao hình chóp, và R_b, R_d là bán kính của mặt bên và đáy, a là độ dài giao tuyến của mặt bên và đáy thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp : $R=\sqrt{R_b^2+R_d^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$