

# CHUYÊN TOÁN 10-11-12-LTĐH

Phạm Đào Thanh Tú (Xem chi tiết mặt trong)

## TÓM TẮT LÝ THUYẾT ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

### 1 Công thức lượng giác

#### 1.1 Hệ thức cơ bản

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \bullet 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} & \bullet 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} \\ \bullet \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \bullet \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \bullet \tan x \cdot \cot x &= 1 \end{aligned}$$

#### 1.2 Công thức cộng

$$\begin{aligned} \bullet \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a & \bullet \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \\ \bullet \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{aligned}$$

#### 1.3 Công thức nhân đôi

$$\begin{aligned} \bullet \sin 2x &= 2 \sin x \cos x & \bullet \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \bullet \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

#### 1.4 Công thức nhân ba

$$\bullet \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \qquad \bullet \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

#### 1.5 Công thức hạ bậc

$$\bullet \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \bullet \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

## 1.6 Công thức tính theo $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\bullet \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\bullet \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\bullet \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

## 1.7 Công thức tổng thành tích

$$\bullet \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\bullet \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\bullet \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\bullet \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

## 1.8 Công thức tích thành tổng

$$\bullet \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\bullet \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\bullet \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

## 1.9 Một số công thức khác

$$\bullet \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\bullet \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\bullet (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

$$\bullet \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

$$\bullet \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3 \sin^2 2x}{4}$$

# 2 Các lý thuyết về đạo hàm

## 2.1 Định nghĩa và các tính chất

1. **Định nghĩa.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a, b)$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ , nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

được gọi là đạo hàm của  $f(x)$  tại  $x_0$ , kí hiệu là  $f'(x_0)$  hay  $y'(x_0)$ , khi đó

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 2. Các qui tắc tính đạo hàm.

(a)  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ .

- (b)  $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
- (c)  $[kf(x)]' = kf'(x)$  với  $k \in \mathbb{R}$ .
- (d)  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$  với  $g(x) \neq 0$ .
- (e)  $y'_x = y'_u.u'_x$  với  $y = y(u)$ ,  $u = u(x)$ .

## 2.2 Bảng các đạo hàm cơ bản

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp $u = u(x)$
• $(c)' = 0$ với $c \in \mathbb{R}$	
• $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	• $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}u'$
• $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	• $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
• $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	• $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
• $(e^x)' = e^x$	• $(e^u)' = e^u.u'$
• $(a^x)' = a^x \ln a$	• $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
• $(\sin x)' = \cos x$	• $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
• $(\cos x)' = -\sin x$	• $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
• $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	• $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
• $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	• $(\cot u)' = -u' \cdot \frac{1}{\sin^2 u}$

## 2.3 Vi phân

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(a, b)$  và có đạo hàm tại  $x \in (a, b)$ . Giả sử  $\Delta x$  là số gia của  $x$  sao cho  $x + \Delta x \in (a, b)$ . Tích  $f'(x)\Delta x$  được gọi là vi phân của hàm số

$f(x)$  tại  $x$ , ứng với số gia  $\Delta x$ , ký hiệu là  $df(x)$  hay  $dy$ . Như vậy  $dy = df(x) = f'(x)dx$ .

### 3 Lý thuyết khảo sát hàm số

#### 3.1 Tính đồng biến - nghịch biến của hàm số

Giả sử hàm  $f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$ , khi đó:

1.  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$  thì  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(a, b)$ .
2.  $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$  thì  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(a, b)$ .
3.  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(a, b)$  thì  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ .
4.  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(a, b)$  thì  $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$ .

#### 3.2 Cực trị của hàm số

Giả sử hàm  $f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$  và  $x_0 \in (a; b)$

1. Nếu  $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases}$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của  $f(x)$ .
2. Nếu  $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases}$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của  $f(x)$ .
3. Nếu  $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của  $f(x)$ .
4. Nếu  $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của  $f(x)$ .

#### 3.3 Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của hàm số

1. Xét trên một đoạn:
  - (a) Tìm  $x_i \in [a, b], i = 1, 2, \dots, n$  là các điểm tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
  - (b) Tính  $f(a), f(b), f(x_i)$ , với  $i = 1, 2, \dots, n$ .
  - (c) So sánh để suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
2. Xét trên một khoảng : Dùng bảng biến thiên để khảo sát hàm số.

### 3.4 Đường tiệm cận

Kí hiệu  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ .

#### 1. Đường tiệm cận đứng.

Nếu một trong các điều kiện sau xảy ra

$$\left[ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \end{array} \right.$$

thì đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của  $(C)$ .

#### 2. Đường tiệm cận ngang.

Nếu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$  thì đường thẳng  $y = y_0$  là tiệm cận ngang của  $(C)$ .

### 3.5 Các bước khảo sát hàm số $y = f(x)$

1. Tìm tập xác định của hàm số.

2. Sự biến thiên

(a) Chiều biến thiên

i. Tính  $y'$ .

ii. Tìm các nghiệm của phương trình  $y' = 0$  và các điểm tại đó  $y'$  không xác định.

iii. Xét dấu  $y'$  và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

(b) Tìm các điểm cực trị (nếu có).

(c) Tìm các giới hạn vô cực, các giới hạn tại  $+\infty, -\infty$  và tại các điểm mà hàm số không xác định. Suy ra các đường tiệm cận đứng và ngang (nếu có).

(d) Lập bảng biến thiên

3. Vẽ đồ thị: Tính thêm tọa độ một số điểm đặc biệt, lập bảng giá trị và dựa vào bảng biến thiên để vẽ đồ thị.

### 3.6 Tương giao của hai đồ thị

#### 1. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị.

Giả sử  $(C_1)$  là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  và  $(C_2)$  là đồ thị của hàm số  $y = g(x)$ . Khi đó số nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  tương ứng với số giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

#### 2. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số.

##### (a) Dạng 1.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ :

- i. Tại một điểm  $(x_0; y_0)$  trên đồ thị.
- ii. Tại điểm có hoành độ  $x_0$  trên đồ thị.
- iii. Tại điểm có tung độ  $y_0$  trên đồ thị.
- iv. Tại giao điểm của đồ thị với trục tung.
- v. Tại giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Phương pháp giải: Tìm đủ các giá trị  $x_0; y_0 = f(x_0)$  và  $f'(x_0)$ . Khi đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại  $(x_0; y_0)$  là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

##### (b) Dạng 2.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  biết tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng  $y = ax + b$ . Phương pháp giải như sau

- i. Tính  $y' = f'(x)$ .
- ii. Nếu tiếp tuyến song song với đường thẳng  $y = ax + b$  thì hệ số góc của tiếp tuyến bằng  $a$ , tức là giải phương trình  $f'(x) = a$  để tìm  $x_0$ . Nếu tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = ax + b$  thì hệ số góc của tiếp tuyến bằng  $-\frac{1}{a}$ , tức là giải phương trình  $f'(x) = -\frac{1}{a}$  để tìm  $x_0$ .
- iii. Tính  $y_0 = f(x_0)$ .
- iv. Thay vào phương trình tiếp tuyến  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ .

##### (c) Dạng 3.

Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước đến đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Phương pháp sử dụng điều kiện tiếp xúc: Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = g(x)$  tiếp xúc tại điểm có hoành độ  $x_0$  khi  $x_0$  là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

## 4 Các lý thuyết về nguyên hàm

### 4.1 Nguyên hàm và các tính chất

1. Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $K \subseteq \mathbb{R}$ . Hàm số  $F(x)$  gọi là nguyên hàm của hàm  $f(x)$  trên khoảng  $K$  nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K.$$

2. Mọi hàm số liên tục trên khoảng  $K \subseteq \mathbb{R}$  đều có nguyên hàm trên đoạn đó.
3. Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $K \subseteq \mathbb{R}$  thì với mỗi hằng số  $C$ , hàm số  $G(x) = F(x) + C$  cũng là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$ . Ngược lại, nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  thì mọi nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  đều có dạng  $F(x) + C$  với  $C$  là một hằng số. Ký hiệu họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  là  $\int f(x)dx$ , đọc là tích phân bất định của  $f(x)$ . Khi đó  $\int f(x)dx = F(x) + C$  với  $C \in \mathbb{R}$ .

### 4. Các tính chất cơ bản

- (a)  $\int f'(x)dx = f(x) + C$  với  $C$  là hằng số thực.
- (b)  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$  với  $k$  là hằng số thực.
- (c)  $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ .

### 4.2 Phương pháp tính nguyên hàm

1. **Phương pháp đổi biến số.** Nếu  $\int f(u)du = F(u) + C$  và  $u = u(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục thì  $\int f(u(x))u'(x)du = F(u(x)) + C$ .
2. **Phương pháp tích phân từng phần.** Nếu hai hàm số  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $K$  thì  $\int u(x)v'(x)du = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)du$ .

### 4.3 Bảng các nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm sơ cấp	Nguyên hàm của hàm hợp $u = u(x)$
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\int 0dx = C</math></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\int 0du = C</math></li></ul>
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\int dx = x + C</math></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\int du = u + C</math></li></ul>

• $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	• $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
• $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	• $\int \frac{1}{u} du = \ln u  + C$
• $\int e^x dx = e^x + C$	• $\int e^u du = e^u + C$
• $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	• $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
• $\int \cos x dx = \sin x + C$	• $\int \cos u dx = \sin u + C$
• $\int \sin x dx = -\cos x + C$	• $\int \sin u du = -\cos u + C$
• $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	• $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
• $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	• $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

## 5 Các lý thuyết về tích phân

### 5.1 Tích phân và các tính chất

1. **Định nghĩa.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a, b]$ . Hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là tích phân từ  $a$  đến  $b$  (hay tích phân xác định trên  $[a, b]$ ) của hàm số  $f(x)$ . Ký hiệu là  $\int_a^b f(x)dx$ . Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Trường hợp  $a = b$  ta định nghĩa  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . Trường hợp  $a > b$  ta định nghĩa  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .



## 2. Các tính chất của tích phân.

(a)  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  với  $k$  là hằng số.

(b)  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$

(c)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  với  $a < c < b.$

(d) Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

## 5.2 Phương pháp tính tích phân

### 1. Phương pháp đổi biến số

(a) Giả sử hàm số  $x = \varphi(t)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[\alpha, \beta]$  sao cho  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$  và  $a \leq \varphi(t) \leq b, \forall t \in [\alpha, \beta].$  Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

(b) Giả sử hàm số  $u = u(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$  sao cho  $\alpha \leq u(x) \leq \beta, \forall x \in [a, b].$  Nếu  $f(x) = g(u(x)) u'(x), \forall x \in [a, b],$  trong đó  $g(u)$  liên tục trên đoạn  $[\alpha, \beta]$  thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du$$

2. **Phương pháp tích phân từng phần.** Nếu  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$  thì

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

hoặc

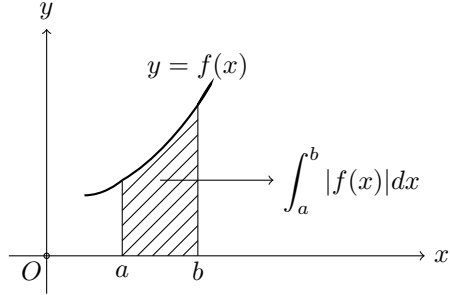
$$\boxed{\int_a^b u dv = [uv] \Big|_a^b - \int_a^b v du.}$$

## 5.3 Ứng dụng của tích phân

### 1. Tính diện tích của hình phẳng

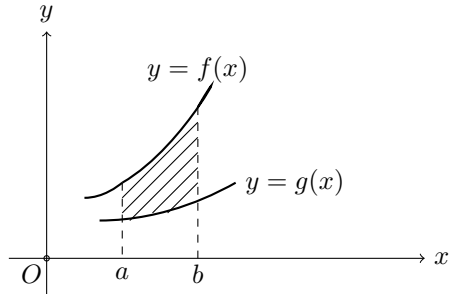
- (a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ , hai đường thẳng  $x = a, x = b$  và trục  $Ox$  là

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



- (b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



### 2. Tính thể tích của vật thể tròn xoay

- (a) Giả sử hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x), y = 0$  (trục  $Ox$ ),  $x = a, x = b$  khi quay quanh trục  $Ox$  tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

- (b) Xét đường cong có phương trình  $x = g(y)$  liên tục với mọi  $y \in [a; b]$ . Nếu hình giới hạn bởi các đường  $x = g(y), x = 0$  (trục  $Oy$ ),  $y = a, y = b$  quay quanh trục  $Oy$  thì thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành xác định bởi  $V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$ .

## 6 Lũy thừa và logarit

### 6.1 Lũy thừa

1. **Lũy thừa với số mũ nguyên dương.** Với  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$  ta có

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ thừa số}$$

2. **Lũy thừa với số mũ nguyên âm.** Với  $a \neq 0, n \in \mathbb{N}$  ta có

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. **Lũy thừa với số mũ 0.** Với  $a \neq 0$  ta có  $a^0 = 1$ .

4. **Căn bậc  $n$ .**

Cho số thực  $b$  và số nguyên dương  $n \geq 2$ . Khi đó

(a) Số  $a$  được gọi là căn bậc  $n$  của  $b$  nếu  $a^n = b$ , ký hiệu  $a = \sqrt[n]{b}$ .

(b) Khi  $n$  lẻ thì tồn tại duy nhất  $\sqrt[n]{b}$  với mọi  $b \in \mathbb{R}$ .

(c) Khi  $n$  chẵn thì

i. Nếu  $b < 0$  thì không tồn tại căn bậc  $n$  của  $b$ .

ii. Nếu  $b = 0$  thì có một căn  $\sqrt[n]{0} = 0$ .

iii. Nếu  $b > 0$  thì có hai căn  $\sqrt[n]{b}$  và  $-\sqrt[n]{b}$ .

5. **Lũy thừa với số mũ hữu tỉ.** Với  $a > 0, m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ , ta có

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

6. **Lũy thừa với số mũ vô tỉ.** Cho  $a > 0, \alpha$  là một số vô tỉ và  $(r_n)$  là một dãy số hữu tỉ sao cho  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$ , khi đó  $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$ .

7. **Các tính chất.** Cho  $a > 0, b > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , khi đó

(a)  $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ .

(b)  $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}; (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$ .

(c) Nếu  $a > 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta \iff \alpha > \beta$ .

(d) Nếu  $0 < a < 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta \iff \alpha < \beta$ .

## 6.2 Logarit

1. **Định nghĩa.** Cho  $a > 0, b > 0, a \neq 1$ , số  $\alpha$  thỏa đẳng thức  $a^\alpha = b$  được gọi là logarit cơ số  $a$  của  $b$  và ký hiệu là  $\log_a b$ , như vậy

$$\alpha = \log_a b \iff a^\alpha = b$$

### 2. Các tính chất

$$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1; a^{\log_a b} = b; \log_a a^\alpha = \alpha$$

### 3. Các quy tắc

- (a) Với các số  $a, b_1, b_2 > 0, a \neq 1$ , ta có

$$\begin{aligned}\log_a(b_1 b_2) &= \log_a b_1 + \log_a b_2 \\ \log_a \left( \frac{b_1}{b_2} \right) &= \log_a b_1 - \log_a b_2\end{aligned}$$

- (b) Với các số  $a, b > 0, a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ , ta có

$$\log_a \left( \frac{1}{b} \right) = -\log_a b; \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b; \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

- (c) Với các số  $a, b, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$  ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b \neq 1); \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b (\alpha \neq 0)$$

4. **Logarit thập phân và logarit tự nhiên.** Với  $x > 0$  ta viết gọn

$$\log_{10} x = \lg x \text{ hoặc } \log_{10} x = \log x; \log_e x = \ln x$$

## 6.3 Phương trình mũ và phương trình logarit

### 1. Phương trình mũ dạng cơ bản

$$a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- (a) Nếu  $b \leq 0$  thì phương trình vô nghiệm.  
(b) Nếu  $b > 0$  thì phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \log_a b$ .  
(c) Các phương pháp để biến đổi về dạng cơ bản: Đưa về cùng cơ số, đặt ẩn phụ, lấy logarit hai vế, ...

## 2. Phương trình logarit dạng cơ bản

$$\log_a x = b \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- (a) Phương trình logarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất  $x = a^b$ .
- (b) Các phương pháp để biến đổi về dạng cơ bản: Đưa về cùng cơ số, đặt ẩn phụ, mũ hóa hai vế, ...

## 6.4 Bất phương trình mũ và bất phương trình logarit

### 1. Bất phương trình mũ cơ bản

- (a) Nếu  $a > 1$  thì  $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x)$  (tính chất đồng biến).
- (b) Nếu  $0 < a < 1$  thì  $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x)$  (tính chất nghịch biến).

### 2. Bất phương trình logarit cơ bản

- (a) Nếu  $a > 1$  thì  $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \iff f(x) \geq g(x) > 0$  (tính chất đồng biến).
- (b) Nếu  $0 < a < 1$  thì  $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \iff 0 < f(x) \leq g(x)$  (tính chất nghịch biến).

## 7 Số phức

### 7.1 Cơ bản về số phức

#### 1. Số phức có dạng

$$z = a + bi$$

trong đó

- (a)  $a$  là phần thực,  $b$  là phần ảo,  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - (b)  $i$  là đơn vị ảo và  $i^2 = -1$ .
2. Hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau, tức là

$$a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

3. Số phức  $z = a + bi$  được biểu diễn bởi điểm  $M(a; b)$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Khi đó, độ dài của  $\overrightarrow{OM}$  gọi là mô đun của số phức  $z$  đó, tức là

$$|\vec{z}| = \left| \overrightarrow{OM} \right| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4. Số phức liên hợp của  $z = a + bi$  là  $\bar{z} = a - bi$ .

## 7.2 Các phép toán với số phức

1. Phép cộng:  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ .
2. Phép trừ:  $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ .
3. Phép nhân:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + cbi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

4. Phép chia:

$$\begin{aligned}\frac{(a + bi)}{(c + di)} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.\end{aligned}$$

## 7.3 Phương trình bậc hai với hệ số thực

1. Số thực  $a < 0$  vẫn có các căn bậc hai là  $i\sqrt{|a|}$  và  $-i\sqrt{|a|}$ .
2. Xét phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0$$

trong đó  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Đặt  $\Delta = b^2 - 4ac$

- (a) Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép (thực)  $x = -\frac{b}{2a}$ .
- (b) Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có 2 nghiệm thực  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- (c) Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình có 2 nghiệm phức  $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ .



**GV chuyên toán: Phạm Đào Thanh Tú. ĐT: 0985750746**

- ✓ Nhận dạy kèm tại nhà từ lớp 6 đến lớp 12, luyện thi vào đại học.
- ✓ Phương pháp sư phạm dễ hiểu, kinh nghiệm luyện thi đại học 10 năm.
- ✓ Rèn luyện học sinh từ trung bình thành khá, giỏi.
- ✓ Tài liệu phát cho học sinh miễn phí và được biên soạn rõ ràng, dễ hiểu bằng phần mềm thông minh Latex.