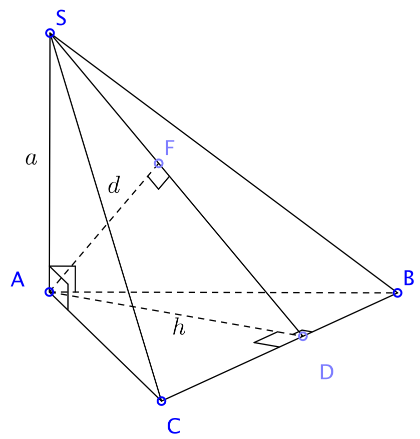
CÔNG THỨC TÍNH NHANH KHOẢNG CÁCH (tập 2)

2. Bài toán mở rộng: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mặt phẳng (ABC), cho $SA = a, S_{\Delta ABC} = S$ và đường cao của tam giác ABC từ A là $h = \dfrac{2S}{AB}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).



Giải.

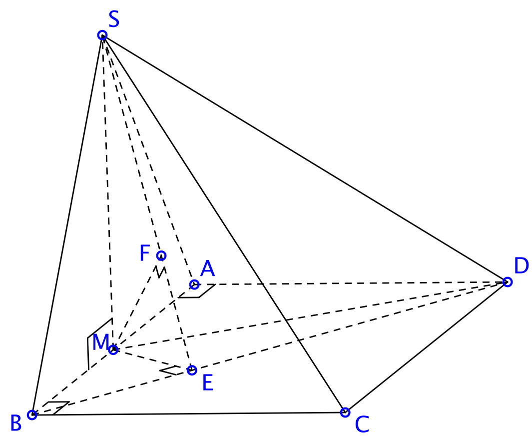
Gọi $d[A,(SBC)] = d$ **. Khi đó:**

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}$$

Như vậy, việc tính khoảng cách đưa về tính đường cao của tam giác ABC và diện tích tam giác ABC được tính bằng công thức Herong. Chú ý là trong trường hợp này, tam giác ABC chỉ là tam giác thường.

Áp dụng:

Bài toán 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $SM \perp (ABCD)$ với M là trung điểm AB. Cho $SA = a\sqrt{2}, AB = 2a, BC = a$. Tính khoảng cách từ A đến (SBD).



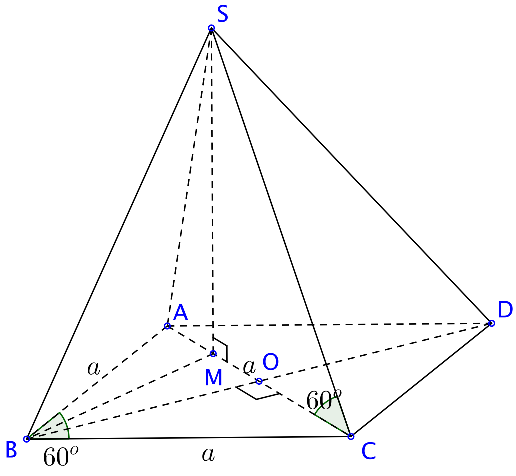
Giải. Ta tính $d = d[M,(SBD)]$.

Xét khối S.MBD. Đường cao $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

Tính diện tích ΔMBD bằng công thức Herong. Ta có: $BM = a, BD = a\sqrt{5}, MD = a\sqrt{2}$. Suy ra $S_{MBD} = \dfrac{1}{2}a^2$. Khi đó: $ME = \dfrac{2S_{MBD}}{BD} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Sau cùng,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{ME^2} + \frac{1}{SM^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$ Từ đó, $d[A,(SBD)] = 2d = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$.

Nhận xét. Qua ví dụ trên có thể thấy, việc tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ sẽ được đưa về khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp cần xét. Mặt khác, bước dựng hình chiếu sẽ được bỏ qua trong thực hành tính toán trắc nghiệm về sau. Ở ví dụ trên, việc tính ME sẽ đơn giản hơn với nhận xét ME bằng một nửa đường cao hạ từ A của tam giác vuông ABD. Tuy nhiên, để bạn đọc làm quen phương pháp cũng như có thuật toán giải quyết bài toán tổng quát, chúng tôi vẫn làm theo cách lấy hai lần diện tích chia cạnh đáy.



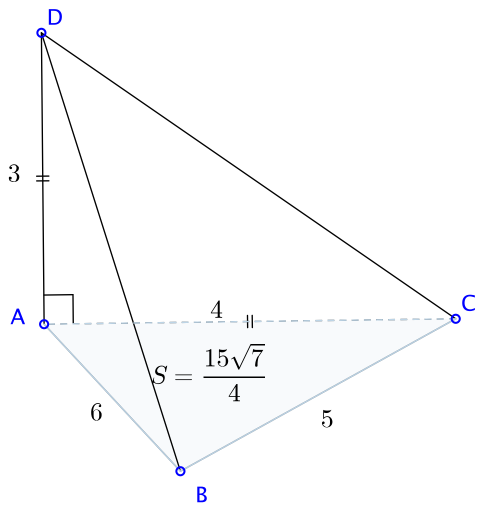
Bài toán 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a góc $ABC = 60^0$, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là điểm M nằm trên AC sao cho AC = 4AM, góc tạo bởi SC với mặt đáy bằng 60^0, tính khoảng cách từ A đến mặt (SBC).

Giải. Ta tính d là khoảng cách từ M đến (SBC). Xét khối chóp S.MBC. Tam giác ABC đều nên dễ tính được $MC = \frac{3a}{4}, BM = \frac{a\sqrt{13}}{4}, SM = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$. Gọi h là đường cao từ M của ΔMBC, khi đó, $h.BC = BO.MC$ suy ra $h = \frac{BO.MC}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{4}}{a} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Từ đó, $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{16}{27a^2} + \frac{64}{27a^2}$. Suy ra: $d = \frac{3\sqrt{15}a}{20}$.

Và có được: $d[A,(SBD)] = \frac{4}{3}d = \frac{\sqrt{15}a}{5}$.

Trắc nghiệm.



Câu 1: Khối tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). AC = 4, AD = 3cm, AB = 6cm, BC = 5cm. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) là:

A. $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm **B.** $\frac{15\sqrt{7}}{8}$ cm

C. 3cm **D.** $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ cm

Đáp án. Tính được $S_{ABC} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$. Khoảng cách từ B đến (ACD) sẽ là đường cao hạ từ B của tam giác ABC. Ta có: $h_B = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{15\sqrt{7}}{8}$.

Câu 2: Khối tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). AC = 4, AD = 3cm, AB = 6cm, BC = 5cm. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) là:

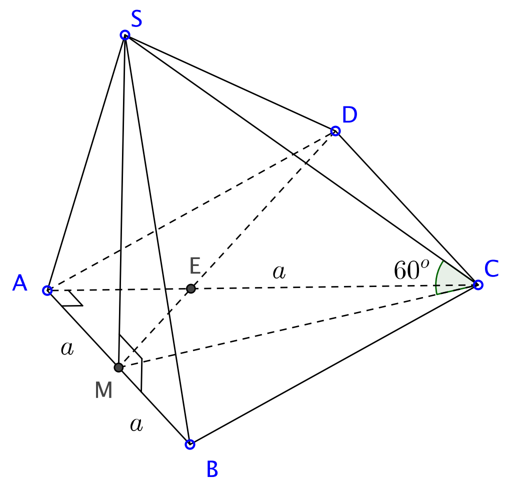
A. $\frac{3\sqrt{77}}{11}$ cm **B.** $\frac{\sqrt{77}}{11}$ cm **C.** $\frac{2\sqrt{77}}{11}$ cm **D.** 3 cm

Đáp án (Hình Câu 1). Tính được $S_{ABC} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$. Đường cao hạ từ A của tam giác ABC là: $h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Khi đó gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD), ta có $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{h_A^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{11}{63}$. Suy ra $d = \frac{3\sqrt{77}}{11}$.

Áp dụng vào tính khoảng cách 2 đường chéo nhau:

Bài toán 7. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh AB = 2a, AC = a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của AB. Góc giữa SC và đáy (ABC) bằng 60^o. Tính khoảng cách giữa AB và SC.



Giải. Dựng hình bình hành ABCD như hình vẽ. Khoảng cách AB và SC đưa về được khoảng cách từ M đến (SCD). Ta xét khối chóp S.MCD. Tính được, $MC = a\sqrt{2}, SM = MC\tan 60^o = a\sqrt{6}$; gọi h_M là đường cao từ M của tam giác MCD, $h_M = AC = a$. Gọi tiếp $d = d[M,(SCD)]$, ta có:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{h_M^2} + \frac{1}{SM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{6a^2} = \frac{7}{6a^2} \text{ hay } d = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

Nhận xét. Do tính đặc biệt của hình trên, ta không cần tính diện tích tam giác MCD. Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát, việc tính diện tích MCD và suy ra đường cao h_M sẽ là cần thiết để tính nhanh khoảng cách. Bạn đọc vui lòng thực hành lại phương pháp Herong tính diện tích tam giác MCD để kiểm tra lại đáp án.

(còn tiếp…)